Tätiger Mathematikunterricht mit dem Cassiopeia A-22T

Uwe Bettscheider und **Ulrich Schoenwaelder**

Das im Titel genannte Projekt soll die Lehrerausbildung der ersten Phase mit der Schulpraxis verbinden, indem in einem fachdidaktischen Seminar an der RWTH Aachen mit den Studierenden und mit Lehrern Unterrichtseinheiten für einen Leistungskurs Mathematik der Stufen 12 und 13 stofflich und methodisch entwickelt und am Inda-Gymnasium Aachen durchgeführt und beobachtet werden. Es steht unter Leitung der Autoren, eines in Fachdidaktik promovierten Gymnasiallehrers mit Lehrauftrag für ein fachdidaktisches Seminar an der Hochschule und eines Hochschulmathematikers, der sich um die Lehrerausbildung bemüht. An Schule und Hochschule sollen Unterrichtsformen erprobt werden, die Mathematik als Tätigkeit in den Blick nehmen; sie sollen dann durch Lehrerfortbildungen und Zusammenarbeit mit Fachleitern des Studienseminars propagiert werden. Der Computereinsatz fördert solche Unterrichtsformen und erfordert stofflich und methodisch neues Nachdenken über Ziele und Durchführung des Unterrichts. Das Projekt startete im Oktober 2001.

Technologische Ausstattung. In der Regel scheitert die Verbreitung computerorientierter Konzepte an der Schule zur Zeit noch an der technischen Ausstattung und an der mangelnden Weiterbildung der Lehrer. Mit einem von der Firma Casio bereitgestellten Klassensatz des Handheld-PC Cassiopeia A-22T und den zugehörigen Programmen (einer Version von Maple, einem Tabellenkalkulationsprogramm und einem Geometrieprogramm) [8, 9, 2] steht den Schülern *jederzeit* ein mächtiges Werkzeug zur Verfügung; mit einem portablen Beamer der örtlichen Sparkasse können Einzelergebnisse sofort allen Schülern sichtbar gemacht werden. Schülerlizenzen für das volle Maple-System, das an der Hochschule seit langem eingeführt ist, wurden von der deutschen Maple-Vertretung für die häuslichen PC der Schüler (etwa zur Verwendung bei Hausaufgaben) gewährt.

Tätiger Mathematikunterricht. Mathematik ist kein Zuschauersport: Schüler und Studierende müssen lernen, Mathematik selbst zu betreiben, und durch aktives Handeln Selbständigkeit erwerben [4]. Wir wollen entsprechende Unterrichtsformen an Schule und Hochschule erproben und propagieren. Dabei sollen die folgenden Tätigkeiten im Blick der Lehrenden und Lernenden stehen:

1. Fragen stellen: mathematische Phänomene erkennen, dadurch außermathematische Sachverhalte mathematisieren und innermathematische Zusammenhänge präzisieren, die richtigen Fragen als Teil des Problemlöseprozesses stellen.

2. Das eigene Handeln reflektieren: problem- und zielorientiertes Planen und Überwachen lernen, hierüber in Gruppen- und Unterrichtsgesprächen diskutieren und entscheiden.

3. Mathematisch kommunizieren: Gesprächen und Vorträgen zuhören, diskutieren, Fragestellungen und Ergebnisse präsentieren, mathematische Texte (der Mitschüler oder aus

Büchern) lesen und schreiben, schreiben, schreiben [6] (Computerrechnungen kommentieren, auch auf Schmierzetteln Durchblick behalten, korrekte Unterrichtsprotokolle in HTML für das E-Buch [1] anfertigen).

Erste Erfahrungen.

1. Die *Vorbereitung des Unterrichts in einem Team* von Referendaren, Lehrern und dem Hochschullehrer macht allen Beteiligten Spaß, wobei durch unterschiedliche Sichtweisen alle lernen [3]. Wesentliches Moment ist die Zielsetzung, dass Begriffsbildungen und Theoriebildung durchschaubar werden, also nicht „vom Himmel fallen“ und aus Schülersicht natürlich sind, und dass dadurch Mathematik verstehbar wird. Die methodischen Entscheidungen sind zu begründen: warum gerade so? [5] Die Unterrichtsfolgen sollen veröffentlicht werden.

2. Leider fanden sich im Wintersemester keine *Studierenden*, die im Rahmen des fachdidaktischen Seminars bereit waren, an dem Entwicklungsprozess mitzuwirken. Die erforderlichen Scheine sind wohl aufgrund von Studien- und Prüfungsordnungen anderweitig günstiger zu bekommen.

3. Bei der Entscheidung über die *Reihenfolge* der unterrichtlichen Tätigkeiten war darauf zu achten, dass nicht zu lange in ein und demselben Stil mit den Schülern gearbeitet wurde, um allen Schülern mit ihren unterschiedlichen Fähigkeiten gerecht zu werden. Auf ausgiebige Phasen der Begriffsbildung (etwa zur Krümmung von Kurven oder zum Vektorbegriff) müssen Strukturierungs- und Übephasen folgen.

4. Die nötigen *Maple-Befehle* für den Umgang mit dem Handheld-PC werden von Fall zu Fall mitgeteilt. Der Computer wird zum numerischen Auswerten, zur grafischen Veranschaulichung und zum symbolischen Rechnen (s. Anhang) verwendet. Die Schüler lernen den Rechner als Werkzeug kennen.

5. Das *Arbeiten in Gruppen* war den Schülern neu und wurde nach ersten Frustrationen über unorganisiertes Gerede bei der Gruppenarbeit zum Thema gemacht (schriftliches Festhalten der jeweiligen Fragestellung, Zeiteinteilung). Der anfänglichen Verweigerung der Gruppenarbeit durch einzelne Schüler wurde durch binnendifferenzierte Aufgabenstellung und durch Einzelarbeit begegnet.

6. Auf das *Kommentieren* von Maple-Worksheets in vollständigen deutschen Sätzen soll bei der Hausarbeit am PC Wert gelegt werden. Erfahrungen liegen uns hier noch nicht vor, man vergleiche aber den Punkt 8 unten.

7. Das *Schreiben* von zusammenhängenden mathematischen Texten und deren Veröffentlichung im Internet macht Studierenden [7] und Schülern [1] Arbeit, aber lohnt, weil das Schreiben das Denken unterstützt und man am Ende ein Ergebnis sieht. Die Texte müssen von den Lehrenden vor der Veröffentlichung auf inhaltliche und formale Korrektheit

durchgesehen werden; da jeder Schüler nur wenige Male drankommt, hält sich der Aufwand für den Lehrer in Grenzen. HTML wird en passant gelernt; die Kenntnisse der Schüler wurden an einem Nachmittag vertieft, die Studierenden lernten es selbst.

8. Der Kurs stellt durch seine für die Schüler neue Form *hohe Anforderungen* an die Lernenden. Zunächst müssen sie sich auf die neuen Anforderungen einlassen und einstellen; es geht ja nicht mehr nur um das sichere Abarbeiten von geübten Verfahren. Bei der unterrichtlichen Diskussion müssen sie mindestens vier Ebenen des Diskurses wahrnehmen: das Reflektieren von Arbeitsweisen, das Unterscheiden von Anwendungsproblem und mathematisch-theoretischer Behandlung sowie den Umgang mit dem Computeralgebra-Programm. Insbesondere der Übergang von der Mathematik zur Symbolik des CAS und umgekehrt die Interpretation der CAS-Rechnung im mathematischen Ausgangsproblem bereitet noch Schwierigkeiten, die von den Schülern selbst oft nicht richtig diagnostiziert werden: sie schieben mathematische Schwierigkeiten auf den Rechner oder umgekehrt. [Beispiel: Während a im mathematischen Zusammenhang einen Positionspfeil (Vektor) bezeichnet, ist es für das CAS nur ein Symbol; vgl. Anhang.] Hinzu kommt, dass die einzelnen Schritte einer Berechnung als Ablaufplan vorab klar sein sollten, damit sich nicht mathematische Überlegungen mit syntaktischen Problemen bei der Eingabe kreuzen müssen (vgl. Punkt 6).

9. Die meisten Schüler sind *stolz*, die ersten an der Schule zu sein, die mit einem Handheld-PC arbeiten können. Für den nachfolgenden Leistungskurs unter Leitung einer Lehrerin, die auch Fachleiterin am Studienseminar ist, werden noch Sponsoren für die technische Ausstattung gesucht.

Anhang „Symbolisches Rechnen“ (Vektorbegriff in der Analytischen Geometrie). In verschiedenen konkreten Beispielen von Vektorräumen soll das Wesentliche am Vektorbegriff hausgearbeitet werden, nämlich dass man mit Vektoren rechnen kann.

1. Reelle Vielfache einer Einheitsgeschwindigkeit liefern den (eindimensionalen) Vektorraum der denkbaren Geschwindigkeiten.

2. Über den Tangentenbegriff bei parametrisierten Kurven kommt man zum Begriff des (momentanen) Geschwindigkeitspfeils, der neben dem Betrag der Geschwindigkeit noch eine Richtung hat. Geschwindigkeitspfeile werden mit der Parallelogrammregel zu einer resultierenden Geschwindigkeit zusammengefasst: $v_1 \& v_2 = w$.

3. Die Punkte des Anschauungsraumes sind bijektiv auf die Positionspfeile (Ortspfeile) mit einem festen Ursprung bezogen. Die Frage nach „dem Mittelpunkt“ von zwei, drei oder n Punkten führt auf das arithmetische Mittel der zugehörigen Positionspfeile, die wiederum mit Hilfe der Parallelogrammregel addiert werden.

4. Nach Wahl einer Basis für die Positionspfeile kann jeder Positionspfeil eindeutig als Linearkombination der Basispfeile dargestellt werden. Die zugehörigen Koeffizientenspalten werden entsprechend komponentenweise addiert und mit reellen Zahlen multipliziert.

5. Im Sinne von Beispiel 3 werden binnendifferenziert (mit steigender Komplexität) Beispiele für das Beweisen mit Hilfe von Positionspfeilen gegeben:

   (a) In welchem Verhältnis teilen sich Diagonale und die kreuzenden Seitenhalbierenden in einem Parallelogramm?
   (b) In einem räumlichen Viereck unterteilt man das eine Gegenseitenpaar im gleichen Verhältnis und verbindet diese beiden Punkte. Tut man Entsprechendes mit einem weiteren Verhältnis mit dem anderen Gegenseitenpaar, so schneiden sich die beiden Verbindungsgeraden in einem Punkt, der die Verbindungsgeraden im jeweiligen Verhältnis teilt.
   (c) Der Satz von Pappos für Punktetripel auf zwei sich schneidenden Geraden: die drei Schnittpunkte von jeweils zwei über Kreuz verbundenen Punkten liegen auf einer Geraden.

   In diesen drei Beispielen werden die Positionspfeile zu gegebenen Punkten in Maple durch Variable dargestellt, ebenso die Punkte auf einer Geraden in einer Parameterdarstellung durch einen variablen Koeffizienten. Mit den Positionspfeilen wird genau so gerechnet wie in Maple die Variablen manipuliert werden: die Rechenregeln sind analog. Das symbolische Rechnen in Maple bereitet die Vektorraumaxiome des axiomatischen Aufbaus der Hochschule vor. Die Schüler erahnen, dass es dem Rechner völlig egal ist, ob wir die Variablen als Positionspfeile (wie zunächst intendiert) oder vielleicht als Geschwindigkeitspfeile interpretieren.

6. Später sollen geometrische Begriffe auch in Funktionenräumen interpretiert werden, etwa „Orthogonalität“ bei der besten Approximation durch Ausgleichspolynome.

Schlussbemerkung. Das Vorhandensein des Rechners zwingt uns, über seinen sinnvollen Einsatz nicht nur methodisch, sondern auch stofflich neu nachzudenken. Dazu brauchen wir engagierte Lehrer für die Zusammenarbeit zwischen Schule und Hochschule sowie Schulverwaltungen und Finanzminister, die ihren Einsatz honorieren.

Literatur

[1] Uwe Bettscheider and Ulrich Schoenwaelder. Tätiger Mathematikunterricht mit dem Cassiopeia A-22T. `http://www.MUmitCAS.de`, Februar 2002.

[2] H.-W. Henn. CAS-Taschenrechner: Ein vergleichender Überblick. *Computeralgebra--Rundbrief (ISSN 0933-5994)*, 27:20–24, Oktober 2000.

[3] Wolfgang Krippner. Fachdidaktische Qualifikation - Rüstzeug für eine sich ändernde Praxis? *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 1995:22–29, 1995.

[4] Gregor Noll and Günter Schmidt. Anschaulicher und lebendiger Mathematikunterricht mit dem Werkzeug Computer - Welche Kompetenzen brauchen Lehrerinnen und Lehrer? *Der Mathematikunterricht*, 43(2):5–11, 1997.

[5] Lothar Profke. Zum Gewinnen und Auswählen von Lernzielen. In W. Walsch, editor, *Mathematikdidaktik als Lehrdisziplin (Kongreß- und Tagungsberichte der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg)*, pages 62–68. Friedrichsbrunn, 1991. ISBN 3-86010-287-7.

[6] Ulrich Schoenwaelder. Schreiben im Mathematikunterricht und -studium. `http://www.math.rwth-aachen.de/LDFM/homes/Ulrich.Schoenwaelder/schreiben.html`, Oktober 2000.

[7] Ulrich Schoenwaelder. Protokolle zur Vorlesung „Grundlagen der Geometrie“ WS 2000/01. `http://www.math.rwth-aachen.de/LDFM/homes/Ulrich.Schoenwaelder/Gdg/grundlagendergeometrie.html`, Februar 2001.

[8] Karel Tschacher. Vorführung des CASIO Computer Extender. `http://www.mathematik.uni-kassel.de/~koepf/Thurnau2000/tschacher1.html`, 2000. Computeralgebra in Lehre, Ausbildung und Weiterbildung, Thurnau, 2000.

[9] Karel Tschacher. Der Computer Extender von Casio. *Computeralgebra-Rundbrief (ISSN 0933-5994)*, 27:19, Oktober 2000.