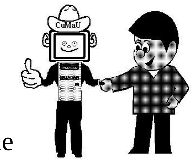
Einsatzmöglichkeiten des CAS Mathcad im Mathematikunterricht am Gymnasium (Erfahrungen aus dem Schulversuch CuMaU)[1]

Reinhard Schmidt, Christian–Weise–Gymnasium Zittau



Im Rahmen des Schulversuchs "Computerunterstützter MathematikUnterricht CuMaU" wurde den Zielen dieses Schulversuchs das CAS Mathcad Ende der Klassenstufe 9 eingeführt: Nachdem die Schüler seit der Klassenstufe 7 mit Tabellenkalkulation (EXCEL) und Dynamischer Geometriesoftware (GeologWin) CuMaU erlebten, soll nun der mögliche und praktikable Einsatz von CAS evaluiert werden.
Auch beim Einsatz des CAS Mathcad offenbart sich: Der Prozess der Einbindung des PC als "Werkzeug und Partner" zur Lösung alter und neuer schulmathematischer Aufgaben bedarf einer langfristigen, schrittweisen und fundierten Planung und sehr kleinschrittigen und maßvollen Realisierung. Basiswissen über funktionale Zusammenhänge, Rechengesetze, Raumvorstellungsvermögen und die sichere Beherrschung der mathematischen Fachsprache und Symbolik müssen primär gesichert sein und permanent gefestigt werden.

Der Prozess des Findens geeigneter Aufgaben und Probleme hat begonnen, befindet sich aber noch in der Anfangsphase. Bis zur eigenständigen Erstellung "Mathematischer Aufsätze" durch die Schüler bedarf es eines vielfältigen Erfahrungs–und Meinungsaustausches zwischen Mathematikern und Didaktikern einerseits und einer stringenten und langfristigen Lehrerfortbildung andererseits.

1 CAS in der Schule - Ist das neu?

Nein, unter Berücksichtigung der Existenz solcher mathematischen "Werkzeuge" und der zunehmenden Computerisierung" unseres alltäglichen Lebens wird schon lange und vielfältig damit geliebäugelt und experimentiert. Ausgehend von den Forderungen nationaler und internationaler Verbände von Mathematikern, Didaktikern und der Wirtschaft [1] bis [3] wurden und werden CAS im Mathematikunterricht eingesetzt:

- DERIVE–Projekte in Österreich (Klagenfurt u. a.),
- Mathematica–Projekte in Österreich (Graz),
- DERIVE–Projekte in Rheinland–Pfalz u.a.,
- CAS (Maple, Mathcad, ...) an Schulen einiger Bundesländer im Rahmen von Schulversuchen, ... ,
- TI 92–Projekt am Pestalozzi–Gymnasium Dresden u. a., CuMaU am Christian-Weise-Gymnasium Zittau, ... (einschließlich Abiturprüfungen mit CAS!),
- zahlreiche Veröffentlichungen über Abituraufgaben mit CAS (DERIVE, TI 92, Maple, Mathcad, ...),
- Tagungen im Rahmen der GDM, Arbeitskreis "Mathematik und Informatik“ seit 1992.

Mittlerweile sind dies nicht nur Einzelprojekte für einzelne Lernbereiche und für einige Klassenstufen. Aber:

Der permanente, langfristige und sinnvolle Einsatz von CAS im MaU bedarf immer noch (oder jetzt erst recht) intensiver didaktischer und lernpsychologischer Evaluationen.

Wie in neuesten Veröffentlichungen dazu eindeutig ausgesagt wird [11] und [12] und auch in [13] sehr nachhaltig illustriert ist, muss der Einsatz von CAS im MaU einerseits mit traditionellen Denk– und Arbeitsweisen der Mathematik einhergehen. Andererseits können neue Wege beschritten werden, neue Inhalte und eine neue Aufgabenkultur (Problemlöseverhalten) realisiert werden.

Im Folgenden sollen ausgehend von ersten Erfahrungen während des Schulversuches "CuMaU" und den Fähigkeiten und Einsatzmöglichkeiten des CAS Mathcad im MaU des Gymnasiums (Sek. I und II) verschiedenste Aspekte illustriert werden. Einige Aussagen sind sicherlich streitbar und noch unvollkommen, zeigen aber einerseits die Disponibilität, Differenzierungsmöglichkeiten und Methodenvielfalt bei der Lösung mathematischer Probleme mittels PC, andererseits die Notwendigkeit einer wohldurchdachten "Dosierung" beim Einsatz entsprechender mathematischer Werkzeuge.

---

[1] Siehe auch Homepage auf dem Sächsischen Bildungsserver) www.sn.schule.de/~cumau . Dort sind auch alle Anlagen und Beispiele abrufbar.

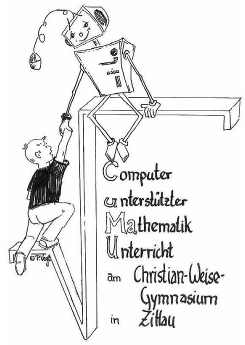
2 Aspekte beim PC–Einsatz im MathematikUnterricht

2.1 Organisatorische (äußere) Aspekte

Auch wenn zur Zeit schon viele Schulen mit PC–Technik ausgerüstet sind oder im Rahmen von Aktionen (z. B. "Medios" in Sachsen) nachziehen, die nun zur Verfügung stehende Technik allein wird keine nachhaltige Veränderung des Mathematikunterrichtes bewirken.

Der sinnvolle Einsatz des PC im Mathematikunterricht setzt eine Informatische Grundlagenbildung der Schüler und Lehrer voraus und sollte gepaart sein mit einem (vorherigem, häufigen) Einsatz des PC.
Dazu müssen die notwendigen personellen, finanziellen (zeitlichen) und materiellen Bedingungen existieren!

"Mal so schnell zwischendurch" oder "mal einige Schaustunden" mögen einen gewissen Aha–Effekt bewirken (wenn die Technik funktioniert), verändern aber nicht die Kompetenzen der Schüler bezüglich Auswahl eines sinnvollen Werkzeuges zum Problemlösen (Papier und Bleistift, GTR, PC).



Am Christian–Weise–Gymnasium in Zittau findet deshalb seit 1997 ein Schulversuch "Computerunterstützter MathematikUnterricht, kurz **CuMaU**" statt (bis 2005 verlängert, Abiturprüfung ab 2003 in LK und GK mit PC).

Zur Realisierung der **Ziele** (siehe Anlage {0}) :

- Empfehlungen zum Computereinsatz in Sek. I (später Sek. II), zur Lehrplangestaltung und zur Lehrerausbildung.
- Qualifikation der Lehrer (schulinterne, regionale und überregionale Fortbildungen),
- Evaluation der Computereinsatzmöglichkeiten, Berichte der Arbeitsgruppe, Erfahrungen und Empfehlungen zur Softwareauswahl,

wurden mehrere PC–Kabinette eingerichtet, so dass im Mathematikunterricht ab der Klassenstufe 7 zunächst für je 2 Schülern ein PC für Einzel– oder Gruppenarbeit zur Verfügung steht. Ab der Sekundarstufe II arbeitet jeder Schüler einzeln am PC.

Nach einem entsprechenden Vorlauf durch den Informatikunterricht konnte ab der Klassenstufe 7 mit CuMaU begonnen werden. Durch den **gezielten Einsatz** des PC in ausgewählten Lernbereichen erlangten viele Schüler eine gewisse **Medienkompetenz** zur Lösung mathematischer Probleme.
Aber es gibt im Mathematikunterricht keine "Produktschulung"! Ein immer sicherer Umgang mit dem PC wird portionenweise per "learning by doing" provoziert. In Anlage {1} sind sinnvolle Beispiele zum PC–Einsatz bei "CuMaU" zusammengestellt. Die mathematischen Inhalte bleiben dabei Im Vordergrund und die Schüler dürfen nicht zu "Knöpfchendrückern" werden.

2.2 Lernpsychologische Aspekte

Während "CuMaU" ermittelten wir durch eine Vielzahl von anonymen Befragungen (ca. halbjährlich) die Meinungen unserer Schüler zu CuMaU (z. B. Vor– und Nachteile, Sicherheit im Umgang mit dem PC). Damit bezogen wir unsere Schüler direkt in den Lernprozess (für die Schüler und uns!) beim Einsatz des PC ein und hatten die Möglichkeit eines Feedbacks bei der Evaluation dieses Prozesses.
Dabei befragten wir die Schüler nicht nur nach ihrer Meinung zu CuMaU, sondern auch z. B. zur Transparenz und Verständlichkeit der Aufgabenstellungen, zur Gruppen– und Projektarbeit und zur Sicherheit im Umgang mit dem PC. Einige Fragebögen und Auswertungen können von der Home–Page zu CuMaU geladen werden.

Der Einsatz eines CAS im MaU kann nur dann Zuwächse im Umgang mit mathematischen Problemstellungen und eine neue Aufgabenkultur bewirken, wenn die Schüler dazu bereit sind (in Sek. I, Grundkurs und Leistungskurs).
Es besteht die Möglichkeit einer Differenzierung nach Schülerleistungen, aber auch die Gefahr einer Überforderung der Schüler und einer Verselbstständigung des Werkzeuges.

Grundlegende Kenntnisse über mathematische Zusammenhänge und Denkweisen (Basiswissen) sind Voraussetzung für erfolgreiches Lernen mit CAS (siehe auch "3.2 Spezielle Aspekte").

2.3 Soziale und kommunikative Aspekte

Durch den Wechsel zwischen Einzel– und Gruppenarbeit, Projektarbeit und "Mathematischem Praktikum" im Team versuchten wir auch diese Kompetenzen der Schüler weiterzuentwickeln.
Während der verschiedenen Lern– und Arbeitsphasen (Vorbereitung und Planung, Durchführung und Vorstellung/Dokumentation) mussten sich die Schüler intensiv und aktiv miteinander auseinandersetzen und halfen sich gegenseitig und "tauschten Tricks aus". Auch in Mathematik leistungsschwächere Schüler konnten sich dadurch in die Gestaltung des Unterrichtes einbringen.

3 Aspekte beim Einstieg und Einsatz des CAS Mathcad im MaU

3.1 Allgemeine Aspekte (Voraussetzungen)

Die im Punkt 2.1 formulierten allgemeinen Voraussetzungen sollten natürlich insbesondere für den Einsatz des CAS Mathcad beachtet werden:

- Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten bei Datei–Arbeit (Speichern, Öffnen)
- Kenntnis der Merkmale einer Windows–Benutzeroberfläche; Mathcad als Windows–typisches Programm (Pull–down–Menüs, Icons, linke und rechte Maustaste, Kopieren, Ausschneiden, Einfügen, ...)
- Zahlenformate (Festkomma, Gleitkomma, Exponentielle Schreibweise, ...)
- Möglichkeiten eines Textverarbeitungsprogramms (Tabulator, Ausrichtung, Formatierung ...)

Der Einstieg in Mathcad ist einfach und wird von den Schülern respektlos und schnell vollzogen, wenn sie die Arbeit mit dem PC gewöhnt sind und die entsprechenden Grundlagen beherrschen.

Im "Elektronischen Tafelwerk" von PAETEC ist u. a. ein SCHNELLEINSTIEG. Nach dessen Einsatz (ca. 3 bis 4 Stunden) können die meisten Schüler mit Mathcad arbeiten. Danach ist die **schrittweise** gemeinsame Erarbeitung von Dokumenten (Learning by doing) sinnvoll.

3.2 Mathcad–spezifische Aspekte

Im Folgenden geht es hier nicht um die Fähigkeiten und Möglichkeiten eines CAS, sondern um erste Erfahrungen beim Einstieg und Einsatz des CAS **Mathcad**:

Rein optisch (in der Seitenansicht oder nach Ausdruck) unterscheidet sich ein Mathcad–Dokument unwesentlich von einem Word–Dokument mit eingebundenen Grafiken (mittels Funktionenplotter erstellt) und mit Formeln (mittels Formeleditor erstellt)[2] {3}.

Es handelt sich aber um **dynamische Dokumente** und in Mathcad ist eine "**Bereichsphilosophie**" verwirklicht. Also muß der "Einsteiger" folgende grundlegenden Aspekte kennen lernen, üben und verinnerlichen.

Mathcad arbeitet in Bereichen. Somit können vielfältigste Dokumente (Interaktive Arbeitsblätter, "Experimentier–Dokumente", "Mathematische Aufsätze") im CuMaU erstellt und genutzt werden.

Im Unterschied zu anderen CAS (DERIVE, Mathematica, MathView, Maple, ...) kann ein Mathcad–Dokument beliebig gestaltet werden: Die einzelnen Bereiche {2} können beliebig auf dem (zunächst leeren) Arbeitsblatt erstellt und dann angeordnet werden (Zur besseren Anschaulichkeit können und werden diese hier durch einen gestrichelten "Bereichsrahmen" umgeben.).

Text–Bereich: Analyse der Parameter ... für Überschriften, Kommentare, ...

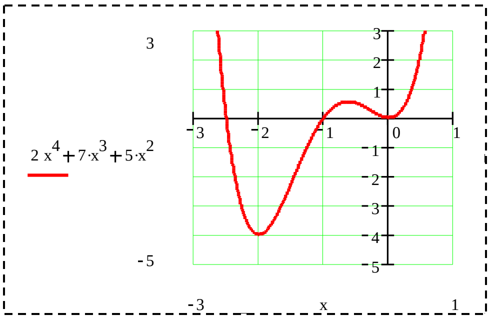
Definition–Bereich: $a := 4$ Wertzuweisung für a

$x := -3,-2.9 \,..\, 3$ Wertzuweisung für x von -3 bis 3, Schrittweite 0,1

Berechnung–Bereich:
Wie auf dem Papier und der Tafel können Terme (unter Beachtung der Hierarchie der Rechenoperationen) eingegeben und automatisch berechnet werden.

$$a + \frac{\dfrac{a+1}{a-1}}{\dfrac{a^2-2^2}{a}} + \sqrt{3\cdot a^{2-a}\cdot 2-(a-4)} = 5.1679$$

Grafik–Bereich:
Frei skalierbare und vielfältige Grafiken können universell gestaltet werden. Achsenkreuz, Gitternetzlinien, Achseneinteilung, Spuren, ... können manipuliert werden.



Alle Bereiche sind wie auf einem Blatt Papier beliebig platzierbar. Dadurch können die Schüler Aufgabenstellungen, Kommentare, Erläuterungen sowie Interpretationen und Analysen unmittelbar in ihrem Dokument sinnvoll anordnen.

[2] In einer ausgedruckten EXCEL–Tabelle sieht man ja auch nicht, ob in die Zellen nur Zahlen eingetippt wurden oder ob eine Berechnung erfolgte.

Es besteht also einerseits die Möglichkeit einer logischen, vollständigen und ordentlichen Dokumentation der Lösungen. Andererseits besteht die Gefahr, dass durch einen verführerischen Layout–Fetischismus viel Zeit vertrödelt wird.

Mathcad arbeitet dynamisch. D. h. nicht nur numerische Berechnungen werden z. B. mit Veränderung des Wertes von Variablen sofort im gesamten Dokument aktualisiert, sondern auch sämtliche (dynamische) symbolische Operationen. Das "verführt zum Drang nach universellen Lösungsdokumenten" {3}.
Variiert man also nicht nur die konstanten Koeffizienten in der Beispiel–Funktion, sondern auch den Grad der Funktion oder (möglich) die Funktionenklasse, entsteht ein Chaos. Schnell sind mehrere Seiten mit irgendwelchen symbolischen Lösungen unüberschaubar gefüllt.

Mathcad beherrscht **alle** schulmathematischen symbolischen Operationen statisch und dynamisch.
Lösung von Gleichungen, Differenzieren, Integrieren, Grenzwertberechnung, Partialbruchzerlegung usw. werden per Mausklick erledigt.

In Mathcad sind die (eigentlich notwendigen) und sinnvollen **4 verschiedenen Bedeutungen des Gleichheitszeichens verwirklicht:** Beim Schreiben auf Papier und Tafel werden diese (noch) ignoriert!

- $\boxed{=}$ "Klassisches" Ist–Gleich — ***Berechne den numerischen Wert 3 +4 = ...***
- $\boxed{:=}$ Ergibt–Anweisung — ***Weise einer Variablen ... den Wert ... zu!***
- $\boxed{=}$ Gleichsetzen — ***Setze f(x) und g(x) gleich!***
- $\boxed{\rightarrow}$ Symbolische Auswertung/Vereinfachung — ***Vereinfache den Term ... symbolisch!***

3.3 Didaktische Aspekte

Die vielfältigen Möglichkeiten von Mathcad können dazu verführen, notwendige (grundlegende) Fertigkeiten der Schüler verkümmern zu lassen. Was sollten unsere Schüler eigentlich auch ohne Technik sicher beherrschen? In [13] sind interessante und wesentliche Aussagen dazu enthalten. "Wie viel Termumformung braucht der Mensch" [14] wurde übrigens schon 1992 hinterfragt.
Anhand des folgenden Beispiels einige Aussagen dazu:

$$f(x,a,b,c) := a\cdot x^2 + b\cdot x + c$$

Nullstellen f(x) = 0 setzen

$$f(x)\ \text{auflösen}\ ,x \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(2\cdot a)}\cdot\left[-b + \left(b^2 - 4\cdot a\cdot c\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right] \\ \dfrac{1}{(2\cdot a)}\cdot\left[-b - \left(b^2 - 4\cdot a\cdot c\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right] \end{bmatrix}$$

Extremstellen f'(x) = 0 setzen

$$\frac{d}{dx}f(x,a,b,c)\ \text{vereinfachen} \rightarrow 2\cdot a\cdot x + b\ \text{auflösen}\ ,x \rightarrow \frac{-1}{2}\cdot\frac{b}{a}$$

Nachweis

$$\frac{d^2}{dx_E{}^2} f\left(x_E, a, b, c\right)\ \text{vereinfachen} \rightarrow 2\cdot a$$

Beispiel: Nullstellen, Extremstellen und deren Nachweis

Ein solch gewaltiges Werkzeug wie Mathcad in der Hand eines "unwissenden" Schülers, der grundlegende Zusammenhänge nicht sicher beherrscht, nutzt gar nichts. Wenn er nicht weiß:
⇨ Wie können die Nullstellen einer Funktion berechnet werden?
⇨ Wie kommt eine solche zweifache Lösung zustande?
⇨ Was bedeutet der Exponent ½ ?
⇨ Welche Bedeutung hat die Diskriminante bei einer notwendigen Fallunterscheidung?
⇨ Was sind und bedeuten die hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz von Extremstellen und wie können diese prinzipiell analysiert werden?

Grundlegende Kenntnisse über mathematische Zusammenhänge und Denkweisen (Basiswissen) sind also Voraussetzung für erfolgreiches Lernen mit CAS (siehe auch "2.2 Lernpsychologische Aspekte") und auch ohne Technik permanent zu wiederholen und zu üben!

4 Beispiele für Einsatzmöglichkeiten von Mathcad im MaU

In den folgenden Beispielen werden konkrete und praktikable Möglichkeiten des Einsatzes von Mathcad im CuMaU am Gymnasium dargestellt und illustriert. Dabei sollen weniger theoretische mathematische und didaktische Probleme analysiert werden, sondern unsere Erfahrungen mitgeteilt werden.
Ausgangspunkt bei der Planung und Realisierung des CAS–Einsatzes waren:

Ziel: ***Handlungen oder Ergebnisse?***

Jetziger "klassischer" MaU ist zu sehr ergebnisorientiert und zu wenig handlungsorientiert.

→ Durch CAS–Einsatz ergibt sich zunehmend die Möglichkeit des **experimentellen Lernens**
d. h. **„Experimentier–Dokumente“** (siehe Beispiel "Senkrechter Wurf nach oben").

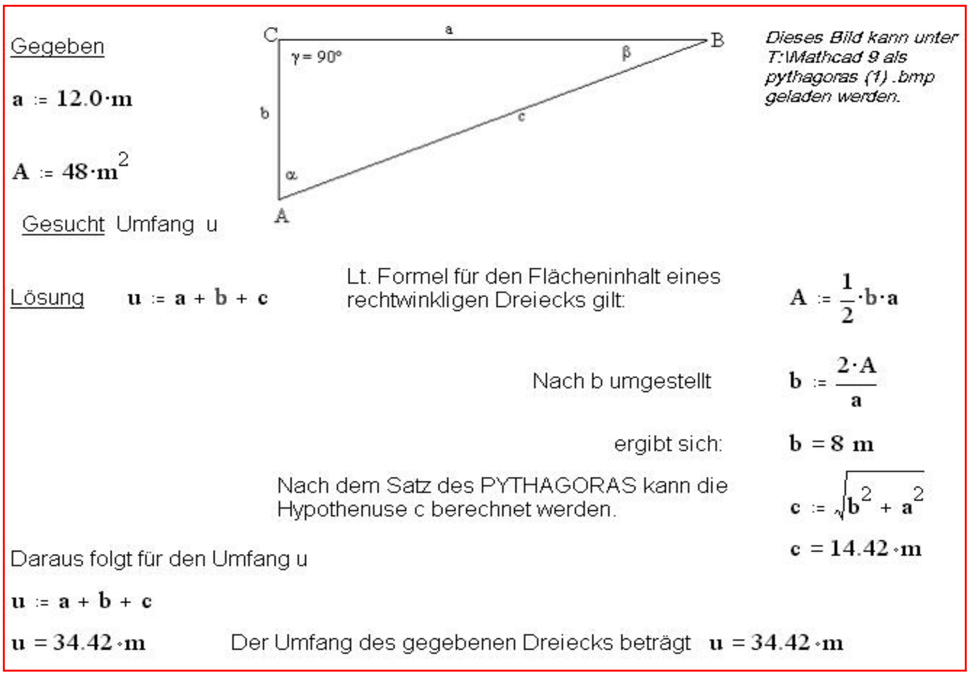
→ Durch CAS–Einsatz können Ergebnisse dynamischer Erkenntnisgewinnung in einem „statischen“ Dokument (Ausdruck einer Aufgabenlösung) logisch und ordentlich dokumentiert werden,
d. h. kleine **„Mathematische Aufsätze“**(siehe Beispiel "Pythagoras (1)).

Methode: zunächst nur numerische und grafische Möglichkeiten, ohne symbolische Operatoren!
- "**Einstiegs**–Dokumente" (in der 9. Klasse **oder** in der 10. Klasse)
- mittels innermathematischer (Iteration, Fallunterscheidung) und außermathematischer Problemstellungen (fachübergreifende Aufgaben) wird Mathcad eingeführt.

4.1 Klassenstufe 9

Thema	**Organisation**	**Zeit**	**Beispiel**
Mathcad–Schnelleinstieg	Einzelarbeit	3 h	Übung (1) bis (3), ...
PHYTHAGORAS (Wiederholung Kl. 8)	Einzelarbeit	je 1 h	Pythagoras (1), ...
Quadratische Funktionen	Gruppenarbeit	2 h	Parametereinfluß
	Gruppenarbeit	je 1 h	Anwendungsbeispiele (Wurfprobleme)

Dieses Dokument aus dem Lernbereich "Satzgruppe des Pythagoras" soll illustrieren, wie dynamische Arbeitsblätter mit Mathcad in vielen Lernbereichen erarbeitet werden können.
Die Schüler analysieren zunächst die Aufgabenstellung. Bei Anwendungsaufgaben folgt die Modellierung und Strukturierung (Mathematisierung). Und dann wird ein Mathcad–Dokument erstellt, in welchem die Berechnung automatisch erfolgt. Anschließend können (evtl. auch durch Variation der Ausgangswerte) die Ergebnisse und Zusammenhänge analysiert werden. Beispiel: Pythagoras (1)



Grundsätzlich galt bei der Aufgabenstellung für die Schüler: Dokumentiere Deine Lösung so wie auf dem Papier! Achte auf Übersichtlichkeit und Logik und Nachvollziehbarkeit, so dass jeder (auch ein andere Schüler!) Deine Lösung verstehen kann!

Das nächste Beispiel aus dem Lernbereich "Quadratische Funktionen" der Klassenstufe 9 verdeutlicht nochmals diesen Prozesscharakter der Lösungsdarstellung und Interpretation:

Aufgaben:

a) Erstelle ein Mathcad–Dokument zur Berechnung (Tabelle) und grafischen Darstellung des Zusammenhangs zwischen Weg und Zeit beim Senkrechten Wurf nach oben!

Hinweise: Anfangsgeschwindigkeit zunächst $v_0 = 100\frac{m}{s}$,

Nutze die entsprechenden Formeln im Tafelwerk und vergleiche mit Deinen Kenntnissen über Quadratische Funktionen!

b) Wann schlägt der Körper auf den Boden?

c) Wo und wann ist der Körper am höchsten Punkt?

Bei diesem Beispiel haben die Schüler nach Erstellung ihres Dokumentes die Möglichkeit des Experimentierens mit den Ausgangsgrößen v_0 und g und können im Unterrichtsgespräch oder in ihrem Dokument entsprechende Zusammenhänge formulieren.

Wurfprobleme: Untersuchung des Zusammenhangs s = f(t) $g = 9.807\ m \cdot s^{-2}$ Erdbeschleunigung

Anfangsgeschwindigkeit $v_0 := 100 \cdot \frac{m}{s}$

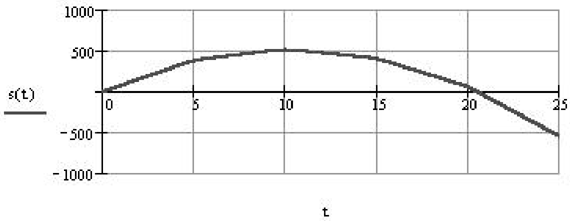
1. Senkrechter Wurf
1.1 Nach oben

Zeitintervall $t_a := 0 \cdot s$ $t_e := 25 \cdot s$ $t_s := \frac{t_e - t_a}{5}$

Aufgabe a) $s(t) := v_0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2$

$t := t_a, t_s .. t_e$

t = (s)	s(t) = (m)
0	0
5	377.417
10	509.668
15	396.752
20	38.67
25	-564.578



Aufgabe b) Wann schlägt der Körper auf den Boden?

$v \cdot t_A - \frac{g}{2} \cdot t_A^2 = 0$ Lösung und Vergleich mit Tafelwerk: $t_A := \frac{2 \cdot v_0}{g}$ $t_A = 20.394\ s$

Aufgabe c) Wo und wann ist der Körper am höchsten Punkt?

Steighöhe lt. Tafelwerk: $s_h := \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$ Steigzeit lt. Tafelwerk: $t_H := \frac{v_0}{g}$

$s_h = 509.858\ m$ $t_H = 10.197\ s$

Beispiel: Senkrechter Wurf nach oben

4.2 Klassenstufe 10

4.2.1 Beispiele ohne symbolische Operatoren

Thema	Organisation	Zeit	Beispiel
Mathcad–Schnelleinstieg	Einzelarbeit (EA)	3 h	Übung (1) bis (3), ...
Körperberechnungen	EA mit "Elektronischem Tafelwerk" {5} und eigenen Dokumenten	je 1 h	Prisma, Pyramide, Kugel, ... Anwendungsaufgaben
Eigenschaften von Funktionen ▪ Graph, Wertetabelle ▪ DB, WB, Symmetrie ▪ charakteristische Punkte (Achsenschnittpunkte, Extrempunkte) ▪ Verhalten an Polstellen (senkrechte Asymptoten) ▪ Verhalten im Unendlichen	Gruppenarbeit: Für jede Klasse von Funktionen wird ein Dokument erstellt (wie Formelsammlung, zum Lernen und Anwenden)	4 h	Funktionen–Klassen: ⇨ rationale Funktionen ⇨ Potenzfunktionen ⇨ Wurzelfunktionen ⇨ Exponentialfunktionen ⇨ Logarithmusfunktionen ⇨ trigonometrische Funktionen

In Anlage {4} ist ein Beispiel zur Analyse der Wurzelfunktion ersichtlich.
Zu jeder Funktionenklasse werden auch entsprechende Anwendungsbeispiele kennengelernt und analysiert.

Zur Sicherung des Basiswissens sollten und müssen die Schüler aber auch ohne Hilfsmittel (Tafelwerk, GTR oder PC) die Bilder der "Elementarfunktionen" skizzieren können und wesentliche Eigenschaften erkennen und interpretieren.

In dem darauffolgenden **"Mathematischen Praktikum"** analysieren die Schüler den **Einfluss von Parametern** schrittweise ausgehend von der Form $y = f(x) = A \cdot \varphi(B \cdot x + C) + D$. Als Hilfsmittel stehen neben Mathcad auch das Programm WinFunktion und der GTR zur Verfügung.
Die Schüler erhalten einen Arbeitsauftrag, der das **schrittweise** Analysieren beinhaltet, zunächst auf eine Funktionsklasse (evtl. auch als Funktionsschar) beschränkt. Anschließend sollen Sie Aussagen über den Einfluss jedes Parameters auf alle bekannten Funktionsklassen treffen.

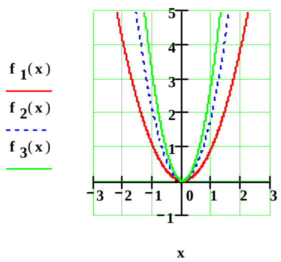
Während dieses Praktikums fertigen unsere Schüler auch ein "Handlungsprotokoll" an, um ihren **Erkenntnisweg** zu dokumentieren und nach einem Vortrag darüber mit anderen vergleichen zu können.

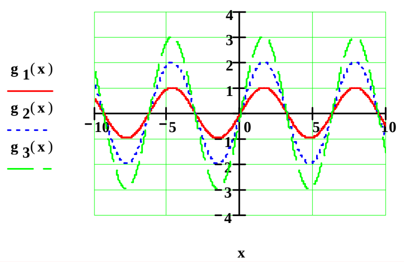
Als Abschluss folgt eine **Komplexübung** mit einfachen, aber auch komplizierten Funktionen (Produkte, Quotienten und Verkettungen), bei denen anhand des Graphen der Funktion charakteristische Eigenschaften (u. a. Achsenschnittpunkte, Asymptoten und Extrempunkte) analysiert werden.

Einfluss des Parameters A in der Funktion f mit f(x) = $A \cdot \varphi(B \cdot x + C) + D$ ***für verschiedene "Elementarfunktionen"***

Beispiele $B := 1 \quad C := 0 \quad D := 0$

Quadratische Funktion	*Sinusfunktion*
$f_1(x) := 1 \cdot x^2$	$g_1(x) := 1 \cdot \sin(x)$
$f_2(x) := 2 \cdot x^2$	$g_2(x) := 2 \cdot \sin(x)$
$f_3(x) := 3 \cdot x^2$	$g_3(x) := 3 \cdot \sin(x)$





Beispiel: Einfluss von A auf das Bild einer beliebigen Funktion

4.2.2 Beispiele mit symbolische Operatoren

Erst im nächsten Lernbereich "**Gleichungen**" in der Klassenstufe 10 werden die symbolischen Operatoren eingeführt.

Vorher sollten **verschiedene Lösungsverfahren** eingeführt, verglichen und angewendet werden:
- Lösung durch Ablesen (Zoom–Funktion von Mathcad) der Nullstellen und Schnittstellen,
- Inhaltliches Lösen (z. B. anhand von Wertetabellen),
- Numerische Lösungsverfahren (Iteration), auch Zielwertsuche in EXCEL,
- Äquivalenzumformungen (Symbolische Lösungen)

Erst wenn die Schüler über prinzipielle Lösungsmöglichkeiten von Gleichungen informiert sind und einfache Beispiele per Hand beherrschen, sollte das symbolische dynamische Lösen von Gleichungen mit Mathcad eingeführt und praktiziert werden.

Nach dem Lösen von zunächst einfachen Gleichungen "ohne Technik" mit Äquivalenzumformungen wird mit Mathcad der Operator ■ auflösen, ■ → eingeführt und geübt.

Hier offenbart sich auch der Hintergrund der Bedeutung von "Gleichsetzen" (siehe 3.2)

$$(a-1)\cdot(a+2) = a+3 \text{ auflösen}, a \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.236 \\ -2.236 \end{bmatrix}$$

Beispiel: Lösung von Gleichungen

Anschließend sind umfangreiche Übungen und Anwendungsaufgaben (Berechnen von Funktionswerten, Nullstellen und Schnittstellen von funktionalen Zusammenhängen) sinnvoll und notwendig {6}.

Aus inhaltlichen Gründen (Zusammenhang zwischen funktionalen Zusammenhängen und Wachstumsprozessen, Zahlenfolgen als Funktionen und Analogien von Konvergenz– und Grenzwertanalysen bei Zahlenfolgen und Funktionen) und organisatorischen Gründen (Zeitreserven für Sekundarstufe II) entschieden wir uns auf eine **Verlagerung des Lernbereichs "Zahlenfolgen" in die Klassenstufe 10.**

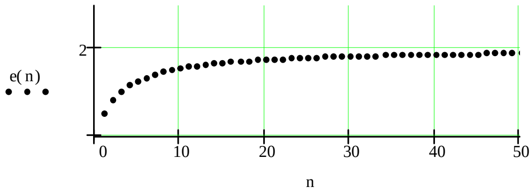
Besonders im Lernbereich "**Zahlenfolgen**" kann der **formale Rechenaufwand** durch den Einsatz eines CAS erheblich **reduziert** werden, wenn die Schüler die entsprechenden Ansätze kennen und verstehen und die "Ergebnisse" nach der symbolischen Manipulation interpretieren können!

Die ***Monotonie*** kann zunächst ausgehend von Bildungsvorschriften und Darstellungsmöglichkeiten von Zahlenfolgen am Bild und der Tabelle illustriert werden. Anschließend wird die Differenz zweier benachbarter Zahlenfolgenglieder gebildet und vereinfacht, was bei "per–Hand–Rechnung" einen erheblichen Aufwand bedeutet, der vom Problem Monotonieanalyse ablenkt.
Wenn die Schüler anschließend in der Lage sind, die Ergebnisse der Vereinfachung mit Mathcad zu interpretieren, können wesentlich mehr **verschiedenartige Beispiele** betrachtet werden {7}

Auch bei der ***Grenzwertanalyse*** mit dem Operator entfällt formaler Rechenaufwand.

$$\lim_{n \to \infty} e(n) \to 2$$

$e(n) := \frac{2 \cdot n}{n+3}$ $\qquad n := 1..50$



Variante 1 (Vergleich zweier benachbarter Glieder)

$e(n) - e(n+1)$ vereinfachen $\to \frac{-6}{((n+3)\cdot(n+4))}$ *< 0 ---> monoton steigend*

Grenzwert $\lim_{n \to \infty} e(n) \to 2$

$e(n) =$

	1
1	0.5
2	0.8
3	1
4	1.143
5	1.25
6	1.333
7	1.4
8	1.455
9	1.5
10	1.538
11	1.571
12	1.6
13	1.625
14	1.647
15	1.667
16	1.684

Beispiel: Monotonieanalyse und Grenzwertermittlung

Die im anschließenden Lernbereich "**Wachstumsprozesse**" von den Schülern erarbeiteten Beispieldokumente können unter www.sn.schule.de/~cumau eingesehen und geladen werden. Wir haben uns nicht nur auf lineare und exponentielle Zu– und Abnahme beschränkt, sondern für die praktische Anwendung **auch das logistische Wachstum** ausführlich behandelt.

Als Abschluss der Lernbereiche "Funktionen", "Gleichungen" und "Zahlenfolgen" schrieben unsere Schüler je eine **2-stündige Klassenarbeit**, die aus 2 Teilen bestand:

- **Theorie–Teil (ohne Hilfsmittel)** zu grundlegenden Kenntnissen, Fähigkeiten und
- **Praxis–Teil (mit Formelsammlung, GTR und PC)**, in dem Anwendungsaufgaben und Lösungsverfahren im Vordergrund standen.

Im Lernbereich "**Trigonometrie**" wurden nach der Einführung der entsprechenden Zusammenhänge ohne PC, mit Mathcad komplette Lösungsdokumente für Beispiel– und Anwendungsaufgaben von den Schülern erarbeitet (siehe Home–Page CuMaU).

Auch im abschließenden Lernbereich "Mathematische Beweise", speziell beim **Beweisverfahren der vollständigen Induktion** konnte der Vorteil des CAS Mathcad sinnvoll genutzt werden. Die Reduzierung des formalen Aufwandes bei Termvereinfachungen war für Schüler, die die Beweisphilosophie verstanden haben, diese in entsprechenden Ansätze formulieren und interpretieren können, ein echter Zuwachs.

Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion *Kursiv Geschriebenes sind* ***zusätzliche*** *Bedienungs-Hinweise!*

Beispiel SF1: Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n

Behauptung $S(n) := n \cdot \frac{n+1}{2}$ Summenformel *S(n) heißt: Summe aller n*

$a(n) := n$ n - ter Summand

1. Induktionsanfang $a(1) = 1$ $\qquad S(1) = 1$ Beide Werte sind gleich, also gilt S(n) für n = 1!

2. Induktionsschritte

Induktionsvoraussetzung für k-te Summe $S(k) \to k \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot k + \frac{1}{2}\right)$ *k ist eine beliebige Zahl zwischen 1 und n.*

Induktionsbehauptung (I) *Operator "sammeln" aus Symbolleiste "Symbolik",*

Für die (k+1)- te Summe $S(k+1) \to (k+1) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot k + 1\right)$ sammeln, k $\to \frac{1}{2} \cdot k^2 + \frac{3}{2} \cdot k + 1$ **Term I**

Falls die Behauptung für k gültig ist, muß sie auch für k + 1 gelten.

Induktionsbeweis (II)

Für die (k)- te Summe + (k+1)- tes Glied $S(k) + a(k+1) \to k \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot k + \frac{1}{2}\right) + k + 1$ sammeln, k $\to \frac{1}{2} \cdot k^2 + \frac{3}{2} \cdot k + 1$ **Term II**

3. Interpretation Beide vereinfachte Terme I und II stimmen überein, also:
Wenn die Behauptung für alle (beliebigen) k und k+1 gilt, so gilt sie auch für alle n.

Beispiel: Beweis einer Summenformel

4.3 Sekundarstufe II (Analysis)

Wie im Punkt 2 ausführlich dargestellt, erleben unsere "CuMaU–Schüler" seit der Klassenstufe 7 den Mathematikunterricht am PC {0}. Der Einsatz von CAS ist also zur Normalität geworden und:

> In allen Lernbereichen der Analysis (Sek. II) kann der PC (Mathcad, WinFunktion, EXCEL) permanent eingesetzt werden, wenn die Schüler den sinnvollen Einsatz dieser Werkzeuge sicher beherrschen. Das heißt, für ihre Mitschriften im Unterricht, für alle Aufgaben und für Klausuren nutzen die Schüler den PC.

Im Gegensatz zur Arbeit mit dem GTR stellt sich beim Einsatz von Mathcad zur Lösung von **Standardaufgaben** (charakteristische Punkte, Anstiegsprobleme, Tangentenprobleme, Asymptoten und Flächenberechnungen, ...) nicht die Frage: "Was soll der Schüler noch aufschreiben?"

Die entsprechenden Ansätze müssen mathematisch und syntaktisch exakt im Mathcad–Dokument formuliert werden.

Die "Lösungen" liefert Mathcad anschließend automatisch und die Schüler interpretieren diese.

Wenn auch im Zeitalter von CAS die "klassische Kurvendiskussion" in den Hintergrund rückt (letztendlich löst ja Mathcad alle Standardaufgaben per Knopfdruck), sollten die Schüler die notwendigen Ansätze, Denkweisen und Interpretationen als "Handwerkzeug" zur anschließenden Lösung von Anwendungsaufgaben und offenen Aufgabenstellungen sicher beherrschen!

Zum Beispiel:

> "Interpretieren Sie wesentliche Eigenschaften von f und weisen Sie diese rechnerisch nach!"

Je nach Lernfortschritt müssten evtl. auch Teilaufgaben formuliert werden.

Analyse charakteristischer Eigenschaften einer gebrochen rationalen Funktion $f(x) := \frac{x^2 - x - 2}{2\cdot x - 6}$

gelb: mögliche Teilaufgaben

grau: sinnvolle Kommentare

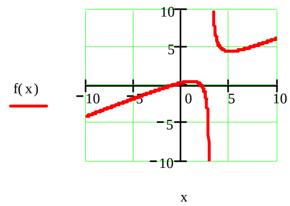
Definitionsbereich $N(x) := 2\cdot x - 6$ $N(x) = 0$ auflösen , x $\rightarrow 3$

Polstelle $x_P := 3$

Koordinaten der Achsenschnittpunkte

Schnittpunkt mit y-Achse $f(0) \rightarrow \frac{1}{3}$

Nullstellen $f(x) = 0$ auflösen , x $\rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $x_{N1} := -1$ $x_{N2} := 2$



Extrempunktkoordinaten von f (einschließlich Nachweis der Art der Extrema)

Zusatz: 1. Ableitung

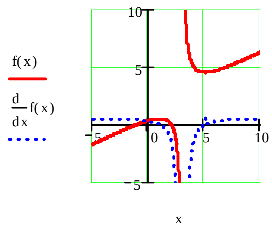
notwendige Bedingung: $\frac{d}{dx}f(x) = 0$ auflösen , x $\rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ $x_{E1} := 1$ $f(x_{E1}) = 0.5$ $x_{E2} := 5$ $f(x_{E2}) = 4.5$

$\frac{d}{dx}f(x)$ vereinfachen $\rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2 - 6\cdot x + 5)}{(x-3)^2}$

hinreichende Bedingung:

$\frac{d^2}{d\,x_{E1}^2} f(x_{E1}) \rightarrow \frac{-1}{2}$ *< 0 --> Maximum*

$\frac{d^2}{d\,x_{E2}^2} f(x_{E2}) \rightarrow \frac{1}{2}$ *> 0 --> Minimum*



Interpretieren Sie anhand einer geeigneten grafischen Darstellung Ihre Lösungen!

Die erste Ableitung von f charakterisiert den Anstieg von f. D. h. an den Nullstellen der 1. Ableitungsfunktion f '(x) hat f(x) einen Anstieg von 0, also waagerechte Tangenten und (evtl., siehe hinreichende Bedingung) Exstremstellen.

Verhalten von f im Unendlichen $\lim_{x \to \infty} f(x) \rightarrow \infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) \rightarrow -\infty$

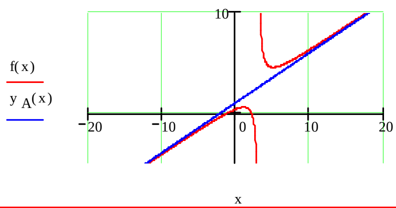
Partialbruchzerlegung $\frac{(x^2 - x - 2)}{(2\cdot x - 6)}$ konvert , teilbruch , x $\rightarrow \frac{1}{2}\cdot x + 1 + \frac{2}{(x-3)}$

Asymptotengleichung $y_A(x) := \frac{1}{2}\cdot x + 1$

Verhalten an der Polstelle $x_P \rightarrow 3$

"von links" $\lim_{x \to x_P^-} f(x) \rightarrow -\infty$

"von rechts" $\lim_{x \to x_P^+} f(x) \rightarrow \infty$



Beispiel: KuDi einer gebrochen–rationalen Funktion

Diese **Analyse grundlegender Eigenschaften** sollte auch beim Einsatz eines CAS schrittweise, wie in den meisten Lehrplänen enthalten, auf verschiedenste Funktionsklassen und Funktionsscharen mit entsprechenden Anwendungsaufgaben erweitert werden. Im Leistungskurs ist auch im Lernbereich **"Anwendungsaufgaben"** die Analyse von Kurven in Parameterform und Polarkoordinaten sinnvoll.

Im Lernbereich **"Extremwertaufgaben"** können nun diese Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten der Schüler mit den Möglichkeiten eines CAS sinnvoll kombiniert werden.

> Beim Einsatz eines CAS zur Lösung von Anwendungsaufgaben zeigt sich wiederum sehr deutlich, dass die Modellierung eines mathematischen Problems per Kopf und auf dem Papier vor dem "Eingeben" in den PC erfolgen muss. Sonst verselbstständigt sich das Werkzeug Mathcad (siehe auch 2.2).

Das Beispiel "Tunnel" wurde mit den Schülern **zunächst vollständig per Hand ohne Technik** gelöst und **erst dann mit Mathcad** umgesetzt, um den Schülern einen notwendigen und **sinnvollen Algorithmus** zu zeigen.

Mit weiteren Beispielen, welche dann gleich mit Mathcad bearbeitet werden und verinnerlicht sich dieser zunehmend.

Interessant ist, dass einige Schüler ausschließlich mit Mathcad arbeiten und ihre gesamte Lösung in einem entsprechenden Dokument darstellen, einige aber auch die Aufgabe auf dem Papier lösen und Mathcad nur zum "Rechnen" (einschließlich Symbolik) nutzen. Beide Möglichkeiten sollten zugelassen werden.
Weitere Beispiele dazu sind auf der CuMaU–Hompage abrufbar.

Der Querschnitt eines Tunnels habe die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Der Gesamtumfang des Querschnitts beträgt 18 m.
Für welchen Halbkreisradius wird die Querschnittsfläche am größten?

1. Aufstellung der Zielfunktion

Nebenbedingung $u := 18$ *Umfang in Metern*

A soll Maximal werden.

$A(r,h) := 2\cdot r\cdot h + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2$

$u = r\cdot\pi + 2\cdot r + 2\cdot h$ auflösen, h $\rightarrow 9 - \frac{1}{2}\cdot r\cdot\pi - r$

Zielfunktion

$A(r) := 2\cdot r\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot u - \frac{1}{2}\cdot r\cdot\pi - r\right) + \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2$ vereinfachen $\rightarrow 18\cdot r - \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2 - 2\cdot r^2$

2. Extremwertaufgabe

$\frac{d}{dr}A(r) = 0$ auflösen, r $\rightarrow \frac{18}{(\pi + 4)}$

$r_E := \frac{18}{(\pi + 4)}$ $r_E = 2.52$

Zusatz

$\frac{d}{dr}A(r) \rightarrow 18 - r\cdot\pi - 4\cdot r$

$A(r) \rightarrow 18\cdot r - \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot r^2 - 2\cdot r^2$ $A(r_E) = 22.684$

Nachweis

$\frac{d^2}{dr^2}A(r) \rightarrow -\pi - 4 = -7.142$

< 0 , daraus folgt:
Für einen Halbkreisradius von 2,52 m hat die Querschnittsfläche des Tunnels einen maximalen Flächeninhalt von 22,68 m.

Beispiel: Extremwertaufgaben Tunnel

5 Ausblicke und Perspektiven

"CuMaU" wird am Christian–Weise–Gymnasium Zittau (einschließlich Abiturprüfung mit PC) fortgeführt. Wir werden weiter darüber berichten und den Erfahrungsaustausch mit anderen suchen.
Mittlerweile gibt es zum Einsatz von CAS im MaU auch schon viele interessante Veröffentlichungen mit praktikablen Beispielen (für TR mit CAS, Derive), die evaluiert werden müssen.
Auch die zukünftigen Lehrpläne der einzelnen Bundesländer werden die Existenz und Einsatzmöglichkeiten von CAS nicht ignorieren (können).
Allerdings beinhalten auch Expertisen und Empfehlungen deutlich und unsere Erfahrungen verifizieren dies:

Nur durch den Einsatz von CAS (spärlich, wie in Deutschland oder massiv, wie in Österreich) wird der Mathematikunterricht nicht nachhaltig und langfristig beeinflusst. Notwendig sind Konzepte für eine neue Unterrichts– und Aufgabenkultur, die sich dann auch in den Aufgaben der Abiturprüfungen widerspiegelt.
Parallel dazu sind unbedingt umfangreiche Lehrerfortbildungen notwendig.

Wenn Technik (GTR und PC) blind und ohne didaktisches und inhaltliches Konzept eingesetzt wird, besteht die Gefahr, das elementare Fähigkeiten und Fertigkeiten verkümmern. Also muss auch beim Einsatz eines CAS die "**Arbeit mit Papier und Bleistift" praktiziert** und **Wissen und Können ohne Technik** während des Lernens gefordert werden.

Der Einsatz des CAS Mathcad wird zukünftig keine Trennung in "Experimentierdokumente" und "Mathematische Aufsätze" bedeuten, sondern eine Verschmelzung zu **dynamischen Dokumenten**, deren Ausdruck aber **statisch** ist! Also müssen in diesen Dokumenten Berechnungen, Ansätze, Grafiken und Texte (Kommentare, Interpretationen) enthalten sein, was mit Mathcad möglich ist.

Selbsterstellte dynamische Experimentierdokumente können bewirken:
Der Schüler muss das Werkzeug Mathcad beherrschen und sich intensiv und aktiv mit einem mathematischen Problem auseinandersetzen (Analyse, Modellierung, Lösungsansätze, "Berechnen lassen"). Die Interpretation findet zwar auf einer anderen Ebene statt, aber Ausgangspunkte sind eigene Denkleistungen.
Auch **fertige interaktive Arbeitsblätter** aus einem Schulnetz, Elektronisches Tafelwerk oder aus dem Internet zum Beispiel: http://www.univie.ac.at/future.media/mo/tests/diff1/ablerkennen.html , sind sinnvoll, gestatten aber "nur" das Experimentieren mit fertigen Denkschemata.
Mathematische Aufsätze mit dynamischen Operatoren könnten als Lösungsvariante zukünftiger Aufgabenstellungen (innermathematisch und außermathematisch) neben Handgeschriebenen akzeptiert werden. Ein mögliches Beispiel ist in Anlage {8} ersichtlich.

6 Literatur

[1] „Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung an der Schwelle zu einem neuen Jahrhundert, Bonn, Mai 1998, MNU, Internet;

[2] „Forderungen an einen Mathematikunterricht der nichtgymnasialen Schulformen in der Sekundarstufe I. mehr als eine Lehrplantagung“, Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V.; Juni 1999; Internet;

[3] „Empfehlungen zur Gestaltung von Lehrplänen bzw. Rahmenplänen für den Mathematikunterricht, Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V., Januar 1999; Internet;

[4] *Rainer Heinrich*: „Erziehen wir durch Verwendung Grafikfähiger Taschenrechner zu ‚Knöpfchendrückern‘ ?“, Mathematik in der Schule 37 (1999) 2;

[5] *Christian Wagenknecht* „Informatikfundierter Mathematikunterricht“, in Praxis der Mathematik, Heft 4, Aulis Verlag Köln, 1999;

[6] *Reinhard Schmidt*: Reflexionen über (alte) Ziele des Mathematikunterrichtes, Bericht über die 11. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V., Oktober 1995, Wolfenbüttel, Franzbecker, 1995;

[7] *Henning Körner:* "Was bleibt von Kurvendiskussionen im Zeitalter Grafikfähiger Taschenrechner?" , Bericht über die 17. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V., September 1999, Wolfenbüttel, Franzbecker, 2000;

[8] *Wilfried Herget & Karin Richter:* "Terme verstehen und auch umformen können?", wie [7];

[9] *Achim Kleifeld:* "Bericht zur Arbeitsgruppe CAS in der Sek. II, Analysis", Berichte von Arbeitsgruppe bei der 17. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V., September 1999, Wolfenbüttel, Franzbecker, 2000;

[10] www.sn.schule.de/~cumau ;

[11] *P. Borneleit, R. Danckwerts, H.-W. Henn, H.-G. Weigand:* Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe, Internet;

[12] Auswertung der Expertise [11] der KMK, 2000;

[13] *W. Herget, H. Heugl, B. Kutzler, E. Lehmann*: "Welche handwerklichen Rechenkompetenzen sind im CAS–Zeitalter unverzichtbar?, Computeralgebra–Rundbrief Oktober 200;

[14] *Horst Hischer*: Wieviel Termumformung braucht der Mensch?", Bericht über die 10. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V., September 1992, Wolfenbüttel, Franzbecker, 1993;

7 Anlagen

{0} Ziele des Schulversuches "CuMaU"; CuMaU–Ziele (speziell) 2002.doc,
{1} PC–Einsatz während "CuMaU" der Klassenstufen 7 bis 10; CuMaU 7 bis 10.doc,
{2} Bereichsarten und deren prinzipielle Handhabung; Kurz.doc,

CuMaU–Ziele: Nicht nur sinnvoller PC–Einsatz, sondern mehr...

Aufgaben und Ziele des Mathematikunterrichtes im Gymnasium

→ gültiger LP in Sachsen (Stand 1. August 2001) ergänzt durch:

Was?	Wie?
Lernkompetenz (Selbstlernen–können)	⇨ Hilfemöglichkeiten innerhalb der Software (Assistenten, QuickSheets, ...) ⇨ experimentelles Lernen durch interaktive Dokumente: Tabellenkalkulation (TK), Dynamische Geometriesoftware (DGS) und Computeralgebrasysteme (CAS)
Methodenkompetenz (Methoden der geistigen Arbeit)	⇨ Aufgaben–Analyse, verschiedene Lösungsansätze ⇨ Interpretation der Lösungen, ⇨ Diskussion verschiedener Lösungsvarianten
BASISWISSEN–Kompetenz (Grundlagenbeherrschung)	⇨ Tägliche Übungen, ⇨ mündliche Zusammenfassung (Schülervortrag), ⇨ Lehrbücher, Arbeitsblätter, Übersichten
Medienkompetenz	sinnvoller Einsatz geeigneter Hilfsmittel: ⇨ per Hand, ⇨ GTR, ⇨ PC: "Lösungsdokumente" → Ausdruck "Experimentier–Dokumente" ohne Ausdruck
Teamfähigkeit	freie Gruppenarbeit und Projekte
Sprachliche Kompetenz	⇨ "Mathematische Aufsätze", ⇨ verbale Beschreibung von Lösungen und Ansätzen

Weniger	Mehr
formale Aufgaben	exemplarische Behandlung prinzipieller Ansätze und Verfahren
einseitige, auf ein Hilfsmittel (Formelsammlung, GTR) ausgerichtete Standardlösungen	kreativer und sinnvoller Einsatz mehrerer Hilfsmittel →"Werkzeuge": ⇨ Elektronisches Tafelwerk, ⇨ GTR ⇨ Standardsoftware: EXCEL, GeologWin, Mathcad
Trivialisierung und schematisches Abarbeiten von Algorithmen	Nutzung, Beschreibung und Interpretation vielfältiger Lösungsstrategien und Methoden

7.2 Methoden:

Folgende **prinzipielle Vorgehensweise** ist geplant:

1. Analyse von Beispielen aus der Erfahrungswelt der Schüler → Schlussfolgerung der "Notwendigkeit" mathematischer Verfahren und Denkweisen,
2. Vermittlung (Erarbeitung, Herleitung, Analyse, Andeuten) theoretischer Grundlagen (per Hand, evtl. GTR / PC zur Visualisierung),
3. Üben und Anwenden dieser theoretischer Grundlagen anhand von einfachen Beispielen (per Hand & Kopf, Schüler),
4. Vermittlung durch Zeigen und/oder Probieren (GTR, PC), Üben und Anwenden,
5. Analyse komplexer und umfassender praxisbezogener Beispiele (GTR, PC),
6. Erweiterung der theoretischen Grundlagen (Verfahren) und weitere Beispiele (Anwendung):
   - Möglichkeiten der Differenzierung, Möglichkeit der Begabtenförderung
   - Kennenlernen und Unterscheidung numerischer , algebraischer und grafischer Verfahren

Nr.	Lernbereich & Thema	Zeit	Beispiele	Organisation
EA: Einzelarbeit; GA: Gruppenarbeit, MP: Mathem. Praktikum; KA: Klassenarbeit; P: Projekt				
Klassenstufe 7 (TK: EXCEL)				
Informatik: Ein- und Ausgabegeräte, Windows 98, Starten von Programmen, Speichern von Dokumenten, Grundlagen Netzwerkarbeit, Grundlagen Textverarbeitung & Tabellenkalkulation,				
2.	**Prozent- und Zinsrechnung** (Zinsen und Tilgung, Raten, Zinseszins)	10 h	Sparbücher, Darlehen,	EA, GA, P
4.	**Elemente der Stochastik** (Statistische Erhebungen	12 h	Häufigkeitstabellen und Diagramme	EA, Projekt (GA), KA
Klassenstufe 8 (EXCEL, Funktionenplotter: WinFunktion, DGS: GeologWin, GTR)				
2.	**Lineare Gleichungen und Funktionen (Einführung)**	3 h	Anwendungsaufgaben (auch nichtlineare Fkt.)	EA, GA
	Eigenschaften und Anwendung Linearer Funktionen	15 h	Parameter m und n, Monotonie, Punktprobe, Lagebeziehungen	EA, MP, GA
3.	**Zuf. Ereignisse/ Wahrscheinlichkeit**	3 h	Beispielaufgaben	EA
	Simulation von Zufallsversuchen	5	Zufallszahlen	EA
	Auswertung mehrstufiger ZE	5	Würfeln, Kinder, ...	EA, GA
4.	**Der Kreis**			
	Wiederholung (mit GeologWin)	8 h	Grundkonstruktionen, Makros	EA
	Winkel im Kreis (Finden von Sätzen)	10 h	Peri, Zentri, Sehnen4E. THALES	EA, GA
5.	Satzgruppe des PYTHAGORAS	3 h	Herleitung, Beweis	EA
Klassenstufe 9 (EXCEL, GTR, WinFunktion [CAS: Mathcad])				
0.	Satzgruppe des PYTHAGORAS	6 h	Anwendungsaufgaben	EA, GA
1.	**Reelle Zahlen: Iterationsverfahren**	4 h	Intervallhalbierung, HERON	EA, GA
3.	**Eigenschaften und Anwendung Quadratischer Funktionen**	8 h	Parameter a_2, a_1, a_0; Monotonie, Extrempunkte, Lagebeziehungen	EA, GA, MP, P
5.	**Beschreibende Statistik, Zufallsgrößen**	6 h	statistische Maßzahlen, GALTON	EA, GA
Klassenstufe 10 (Körpergeometrie, Elektronisches Tafelwerk, Mathcad, GTR, EXCEL)				
1.	**Darstellung, Berechnung von Körpern**	14 h	Projektionen, Perspektiven, A, V	EA, GA, P
2.	**Funktionenklassen und deren Eigenschaften:** ▪ Graph, Wertetabelle ▪ DB, WB, Symmetrie ▪ charakteristische Punkte (Achsenschnittpunkte, Extrempunkte) ▪ Verhalten an Polstellen (Asymptoten) ▪ Verhalten im Unendlichen ▪ Schnittpunkte	24 h	Funktionen–Klassen: ⇨ rationale Funktionen ⇨ Potenzfunktionen ⇨ Wurzelfunktionen ⇨ Exponentialfunktionen ⇨ Logarithmusfunktionen ⇨ trigonometrische Funktionen Einfluß von Parametern: $f(x) = A \cdot \varphi(B \cdot x + C) + D$	EA, GA, MP MP
	Anwendungsaufgaben	2 h	Verkettung und Verknüpfung	GA
3.	**Zahlenfolgen und deren Eigenschaften**	8 h	arithmetische und geometrische ZF, Grenzwerte	EA, GA
	Wachstumsprozesse	4 h	linear, exponentiell (Abnahme und Zunahme), beschränkt und logistisch	EA, GA, P
4.	**Gleichungen** (Lösungsverfahren)	8 h	numerische (iterative), grafische und algebraische Verfahren	EA, GA, MP
5.	**Trigonometrie**	4 h	Anwendungsaufgaben	EA, GA, P
6.	**Beweise**	4 h	vollständige Induktion (Summenformeln, Teilbarkeitsregeln, ...)	EA

Berechnung - Bereich: **Nach** Termeingabe [=]
Terme werden so wie per Hand geschrieben dargestellt:

[1] [+] [/] [2] [+] [8] [/] [2] [+] [7] [=] [Enter] ,

Hierarchie der Rechenoperationen Beachten !!
Ergebnisse können **nach Doppelklick** formatiert werden.

Anlage {2}

Text - Bereich: Wird mit ["] begonnen

Oder **nach erstem Wort** **[Leertaste]**

Definition - Bereich: **Wertzuweisung für Variablen**
(Bereichsvariable: von , nächster Schritt , bis)

[x] [:] [-] [1] [,] [-] [0] [.] [5] [;] [3]

Berechnung - Bereich:
(Bereichsvariable)
Nach [=] wird f(x) automatisch berechnet.

Übersicht / Einsteigerhinweise

Termeingabe und -Berechnungen

$$1+\sqrt{2+\frac{8}{2+7}} = 2.69967317119759$$

$$\frac{2}{3^{2+1}-2}+3 = 3.08$$

Berechnung - Bereich: **Nach** Termeingabe [=] Ergebnisse können **nach Doppelklick** formatiert werden.

$anton := 3$

$$2+anton^{2+anton} = 245$$

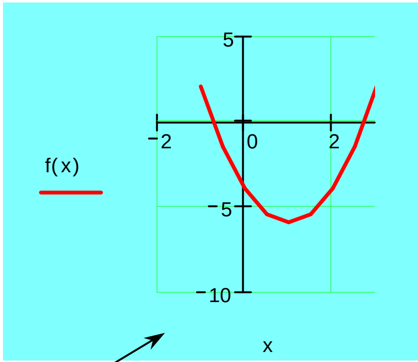
Definition-**Bereich:** [a] [n] [t] [o] [n] [:] [3]

(beliebige **Variablen - Namen)**
Nach Änderung der Wertzuweisung (numerischer Wert für eine Variable) wird das gesamte Dokument von oben nach unten neu berechnet!

$x := -1, -0.5 .. 3$

$f(x) := 2\cdot x^2 - 4\cdot x - 4$

x =	f(x) =
-1	2
-0.5	-1.5
0	-4
0.5	-5.5
1	-6
1.5	-5.5
2	-4
2.5	-1.5
3	2



Bereich für **grafische Darstellungen**

Aufruf durch [@] oder aus Symbolleiste „Diagramme" und Ausfüllen der Platzhalter ■
Grafische Darstellungen können **nach Doppelklick** vielfältig formatiert werden.

Nullstellenberechnung (statisch)

$2\cdot x^2 - 4\cdot x - 4$ hat als Lösung(en) $\begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.732 \\ -0.732 \end{bmatrix}$

Scheitelpunktberechnung (statisch)

$2\cdot x^2 - 4\cdot x - 4$ durch Differentiation, ergibt $4\cdot x - 4$ hat als Lösung(en) 1

Bereich für **statische symbolische Operationen:**
Nach Markierung der Variablen Auswahl den Menüs:
☺ Symbolik → Variable → Differenzieren
☺ Symbolik → Variable → Auflösen
☺ Symbolik → Variable → Ersetzen
(Kommentar wird automatisch erzeugt!)

$2\cdot x^2 - 4\cdot x - 4$ durch Ersetzen, ergibt -6

Nullstellenberechnung (dynamisch)

$$f(x) \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{bmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ gleit}, x \rightarrow \begin{bmatrix} 2.7320508075688772935 \\ -.7320508075688772935 \end{bmatrix}$$

Scheitelpunktberechnung (dynamisch)

$$x_E := \frac{d}{dx}(f(x)) \text{ vereinfachen} \rightarrow 4\cdot x - 4 \text{ auflösen}, x \rightarrow 1$$

$$f(x_E) = -6$$

Bereich für **dynamische symbolische Operationen:** Aufruf aus Symbolpalette