Unterricht mit Parametern in der Sekundarstufe 1

Eberhard Lehmann

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $\qquad y = m \cdot x + n$

$W = \frac{G}{100} \cdot p$ $\qquad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $\qquad A = \frac{1}{2}(a+c) \cdot h$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p^2}{4} - q)}$ $\qquad e = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$

$x = a \cdot \sin(t) + c, y = b \cdot \cos(t) + d$ $\qquad x^2 + y^2 = r^2$

$a^2 + b^2 = c^2$

$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$ $\qquad y = (x-a) \cdot (x-b)$

$V = \pi \cdot r^2$ $\qquad A = \pi \cdot (r_1^2 - r_2^2)$

Überall in der Sekundarstufe 1
begegnet der Schüler Termen mit Parametern!

Erst recht in der Sekundarstufe 2.

Daraus muss man etwas machen!

define binom(a,b,3) = $a^3+3a^2*b+3a*b^2+b^3$

define gerade(x,m,n) = m*x+n

define Prozentw(G,p) =

define VolKreisk(r,h) =

define FlTrapez(a,c,h) = 0.5*(a+c)*h

Baustein-Definitionen

usw.

1. Die Bedeutung von Parametern im Unterricht

Im Duden Informatik (2.Auflage, Dudenverlag, 1993, S.507) wird definiert:

„**Parameter**: Platzhalter in einer Programmeinheit, der erst bei der konkreten Verwendung (↑Aufruf) der Programmeinheit festgelegt wird. Die in der Programmeinheit stehenden Platzhalter bezeichnet man als **formale Parameter**, die im Aufruf der Programmeinheit stehenden Werte als **aktuelle Parameter**. Programmeinheiten sind ↑ Prozeduren, ↑ Funktionen, ↑ Module oder andere spezielle Konstrukte. ... Parameter können ↑ Konstanten, ↑ Variablen, ↑ Marken, ↑ Prozeduren, ↑ Funktion usw., d.h. alle in einem Programm definierbaren Objekte sein."
„**Parameterübergabe**: Bei einem ... ↑ Aufruf müssen die formalen Parameter auf festgelegte Art durch die aktuellen Parameter ersetzt werden."

Bekanntlich sind Kurvenscharen ein Standardthema in der Analysis, das viel interessante Mathematik beinhaltet und nicht ohne Grund beliebt im Unterricht und bei Klausuraufgaben ist. Hierbei werden die Schüler - möglicherweise erstmals - auch mit dem Umgang mit Parametern vertraut gemacht. Weitere Gebiete, in denen schon lange mit Parametern gearbeitet wird, sind die vektorielle analytische Geometrie (z.B. bei Geradengleichungen) oder Kurven in Parameterform. Dabei werden vielfach knappe Termabkürzungen wie f, r, y verwendet, mit denen man viel an Verständnis und an unterrichtlichen Möglichkeiten verschenkt. Schreibweisen, die die Parameter explizit nennen, erweisen sich als günstiger. So schreibt man z. B.:

Kurzschreibweise	ausführliche Notation / Aufrufbeispiel
Kurvenscharen $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $x,a,b,c,d \in \mathbb{R}$,	$f(x, a, b, c, d) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ Aufrufbeispiel: $f(x, 1, 2, 3, 4)$
Vektorielle Geradengleichung $r = r_1 + tu$,	$r(t) = r_1 + tu$ Aufrufbeispiel: $r(5)$
Kurve in Parameterform $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$	$x(t) = \cos(t)$ und $y(t)= \sin(t)$ Aufrufbeispiel: $x(\pi/3)$, $y(\pi/3)$
Trapez-Flächeninhalt $A = (a + b) / h$	$A(a,b,h) = (a + b)*h / 2$

Es lohnt sich, derartige Schreibweisen schon frühzeitig - schon in der Sekundarstufe 1 (ab Klasse 7!) – zu verwenden. Welche Gründe sprechen dafür, was ist zu beachten?

- Die Terme erscheinen unter einem gemeinsamen Aspekt, indem die Schreibweise auf das Wesentliche reduziert wird, nämlich auf die gewählte Einsetzung, Unterschiede werden deutlicher.

- An der kompakten Schreibweise (z.B. f(x,a,b,c,d)) wird deutlicher, dass man diverse Einsetzungen für die Parameter vornehmen kann. Dieser Aspekt verstärkt die Motivation, Einsetzungen zu erproben und gibt damit den Anreiz zu experimenteller Arbeit.

- Statt der einzelne Exemplare eines Objekttyps rücken nun Teilmengen von Objekten ins Blickfeld. Zum Beispiel ist nun nicht mehr nur eine einzelne Kurve von Interesse, sondern es geht gleich um Kurvenscharen – und erst aus dem Vergleich verschiedener Exemplare erschließen sich in der Regel die entscheidenden Eigenschaften. Damit wird auch der Wunsch nach Fallunterscheidungen unterstützt.

- Die Überlegungen bezüglich der einsetzbaren Werte verbreitern das Anwendungsfeld des Terms auf (manchmal unerwartete) unterschiedliche Bereiche. So ist es z.B. möglich in gewisse Terme statt reeller Zahlen auch quadratische Matrizen einzusetzen.

- Die Schreibweise mit Parametern ist „computeralgebra-freundlich" und wird von den CAS-Systemen entsprechend unterstützt – sowohl in algebraischer, als auch in grafischer Hinsicht. Beispiel: define parabel(x, p, q) = x^2 + p*x +q.

- Die schon für die Sekundarstufe 1 sehr nützliche Konzeption von Unterricht unter Parameter-Aspekten erweist sich als ausgezeichnete Vorbereitung für die Probleme der Sekundarstufe 2.

Wir können somit festhalten:

Im „Denken in Parametern und Bausteinen" liegen erhebliche unterrichtliche Möglichkeiten, die sich durch die Verwendung von Computeralgebrasystemen (CAS) und Funktionenplottern noch verstärken bzw. erst machbar werden.

Es ist jedoch zu beachten:

Beim Unterricht mit dem Parameterkonzept muss dafür gesorgt werden, dass der zugrunde liegende, ausführlich geschriebene Term stets im Blickfeld bleibt.

2. Das Bausteindreieck

Die folgenden Ausführungen sind zunächst für den Lehrer als grundlegende Informationen über die didaktisch-methodischen Möglichkeiten des Bausteineinsatzes gedacht. – Wenn Schüler länger mit Bausteinen gearbeitet haben, sollten auch sie diese Ausführungen verinnerlichen. Das wäre ein wesentlicher Beitrag zur Schaffung von Transparenz mathematischer Methoden.

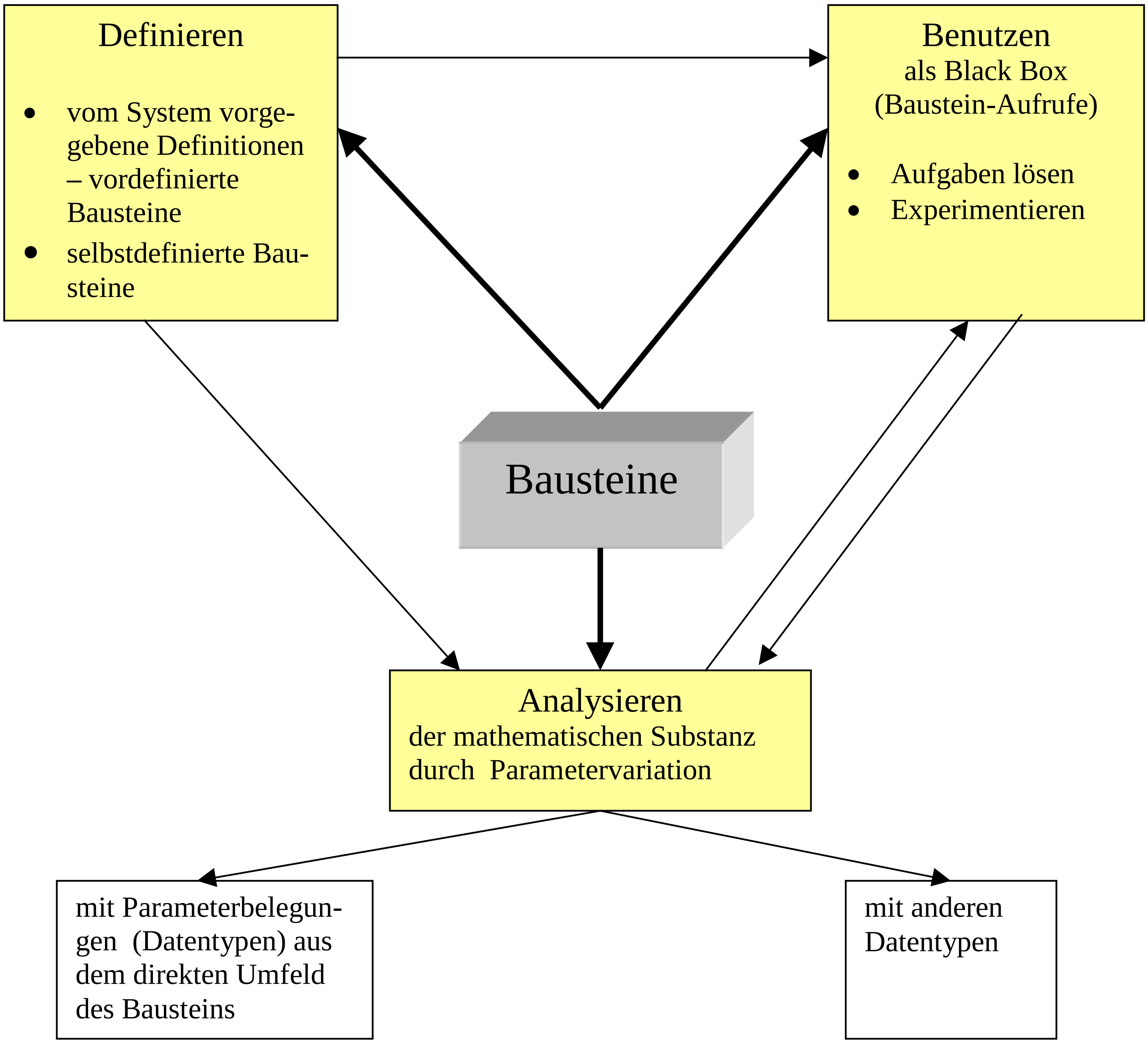


Abb. 2.1: **Das Baustein-Dreieck**: Definieren, Benutzen, Analysieren

Die Überlegungen von Abb.2.1 werden an einem konkreten Beispiel in Abbildung 2.2 verdeutlicht.

Das Bausteindreieck an einem Beispiel

Beispiel, siehe auch Abbildung 2.2:
Bausteindefinition bino2(a,b):= $(a+b)^2$
a und b sind formale Parameter

Aufrufe:bino2(3x, -2y) oder bino2(5,6)
3x, –2y bzs. 5, 6 sind aktuelle Parameter

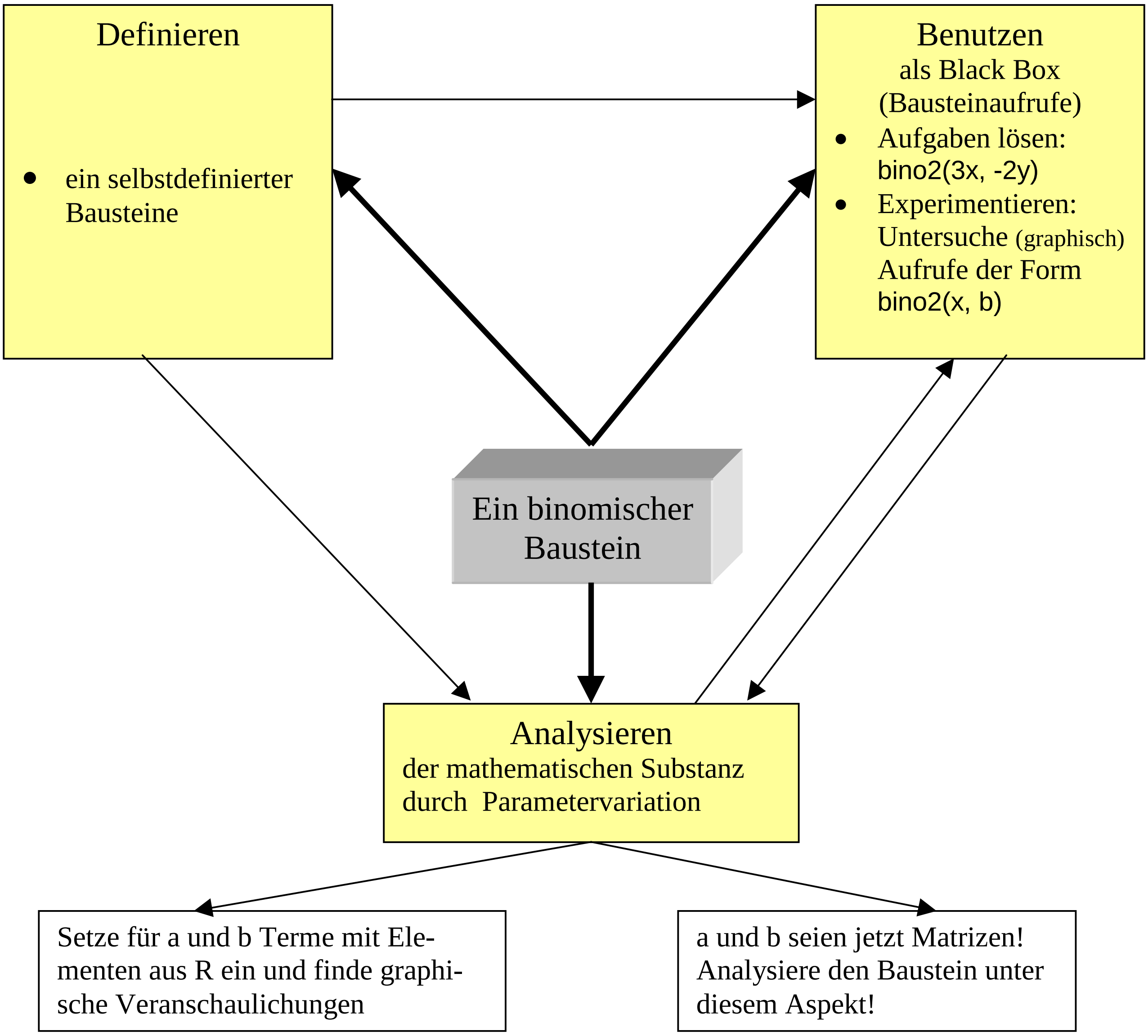


Abb. 2.2: Das *Baustein-Dreieck* am Beispiel eines binomischen Bausteins

Eine Unterrichtsreihe mit Baustein-Verwendung könnte an jeder der drei Ecken des Bausteindreiecks beginnen.

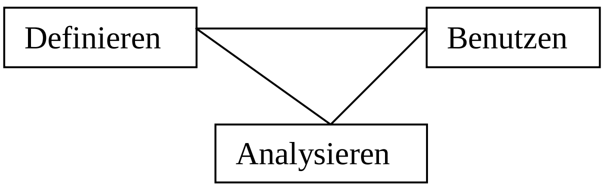


Abb. 2.3: Startpunkte für die Arbeit mit Bausteinen

3. Bausteine definieren, benutzen, analysieren

Alle folgenden Ausführungen sind davon abhängig, wie weit die Schüler bereits Bausteine kennen oder ihnen erstmals begegnen. Je nach Situation sind dann unterschiedliche Wege möglich. Wir beginnen hier mit der Definition eines Bausteins.

3.1 Definieren eines Bausteins

> Es gehört zu den bevorzugten Arbeitsweisen mit einem CAS, Objekte (Terme, Gleichungen usw.) mit einem passenden Namen und geeigneten Parametern zu versehen, jedenfalls wenn das Objekt mehrmals verwendet werden soll.

In dieser passenden Bezeichnung liegt bereits eine wesentliche Grundlage für die Definition von Bausteinen und die Arbeit mit ihnen. Deshalb sollten solche Bezeichnungen schon nach kurzer Zeit eingeführt werden. Die Namen der Bezeichner sollten treffend („sprechend”) gewählt werden, aber auch nicht zu lang sein:

Beispiele:

Anlass, Erläuterung	Definition des Bezeichners	Benutzen des Bezeichners
Die Gleichung 2x+3(x–4) = 6 wird z.B. abgekürzt mit gleich1(x).	gleich1(x) : = 2x+3(x–4) = 6	• gleich1(3), ist 3 eine Lösung? • solve(gleich1(x),x), löse die Gleichung nach x auf
Der Funktionsterm f(x) = a*sin(x) soll häufiger benutzt werden.	funkf(x, a) : = a*sin(x)	• funkf(x, 2), die Funktion y = 2sin(x)
Wir wollen Anwendungen binomischer Formeln bearbeiten.	binomi(a,b,n) : = (a+b)^n	• binomi(a,b,3) • binomi(x,1,2)
Für den folgenden Unterricht werden mehrfach Zeichnungen der Differenzenquotientenfunktion benötigt..	diffq(x,h) : = (f(x+h)–f(x)) / h	• f(x) : = sin(x) Diffq(x, 0.1) • f(x) : = e^x Diffq(x, 0.1)

Wenn wir nun einen Bezeichner mit Parametern benutzen, so ist damit auch bereits ein Baustein definiert.

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit dem Aspekt **„Baustein benutzen”.**

3.2 Benutzen eines Bausteins

In diesem Fall liegt der Baustein solve(...) fertig, also schon definiert vor. Er ist eine Black Box, die vielleicht auch schon früher verwendet wurde oder die für die Schüler neu ist. Er dient jetzt beispielsweise zur Lösung der folgenden Aufgabe.

Aufgabe:	**Lösung:**
Bestimme den Schnittpunkt der Geraden g1 und g2. g1: y = 2x +1, g2: –3x – 4y = +2	*Im Schnittpunkt S der beiden Geraden (falls sie einen besitzen) sind x- und y-Wert bei beiden Geraden gleich. Somit kann man S durch Lösung eines linearen Gleichungs-systems bestimmen.*
Falls der Baustein bekannt ist	*Hierfür können wir den Baustein* solve *benutzen:* ***solve(y = 2x +1 and –3x – 4y = +2, {x,y})****.* *Als Schnittpunkt ergibt sich S(*-6/11, –1/11).*
Falls der Baustein nicht bekannt ist:	Nun müsste der Lehrer oder ein kundiger Schüler diese Möglichkeit des Lösens von linearen Gleichungssystemen vorführen und erläutern.

Zusammenfassung:
Bei dieser Aufgabe wurde der Baustein solve(...) zur Lösung eines linearen Gleichungssystems verwendet – also als Black Box., denn für den Lösungsalgorithmus haben wir uns hier nicht interessiert.

3.3 Bausteine sind Black-Boxes

Die Abbildungen A.3.3-a und A.3.3-b spiegeln zwei wichtige Aspekte der Arbeit mit Bausteinen wider:

(1) Ein Baustein, der in Form einer Black Box vorliegt, wird analysiert – eine White Box entsteht.

(2) Ein Baustein wird schrittweise entwickelt, bis er als Black Box „abgelegt” wird.

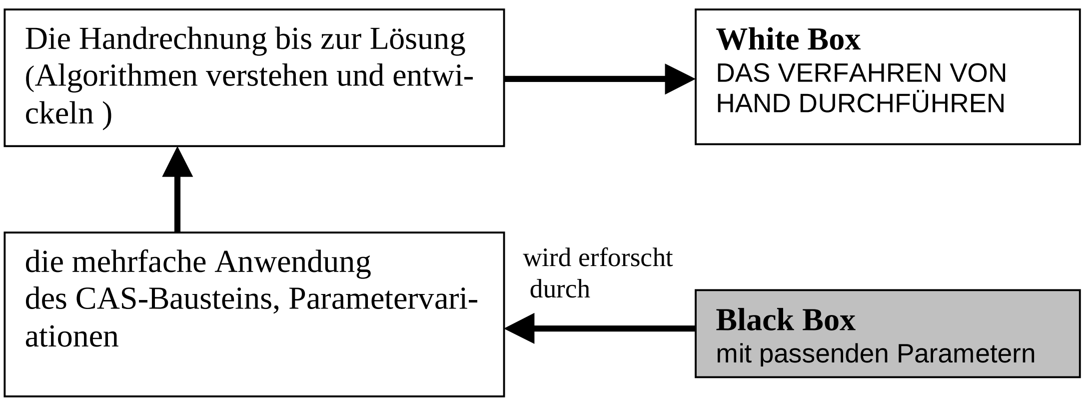


Abb. 3.3-a: Ein Baustein wird erforscht (analysiert)

Bausteine - Black Boxes

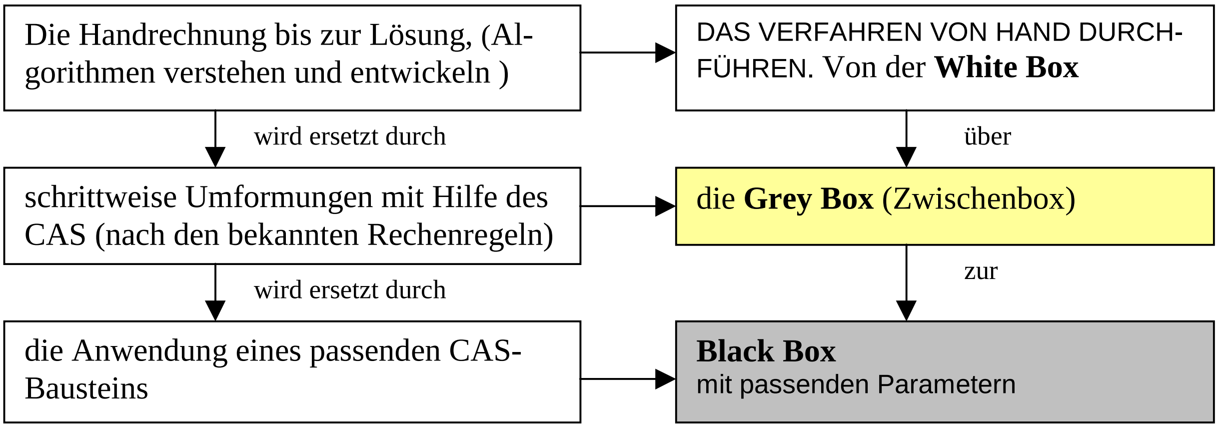
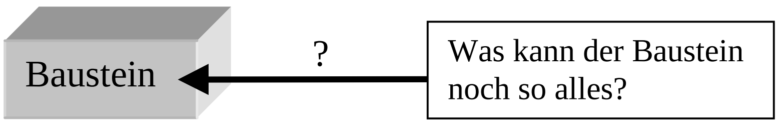


Abb. 3.3-b: Hinführung zu Bausteinen und Black Boxes

3.4 Analyse eines Bausteins

Hat man einen Baustein mehrfach benutzt und einige seiner Anwendungsmöglichkeiten erkannt, besteht möglicherweise der Wunsch, in ihn hineinzublicken



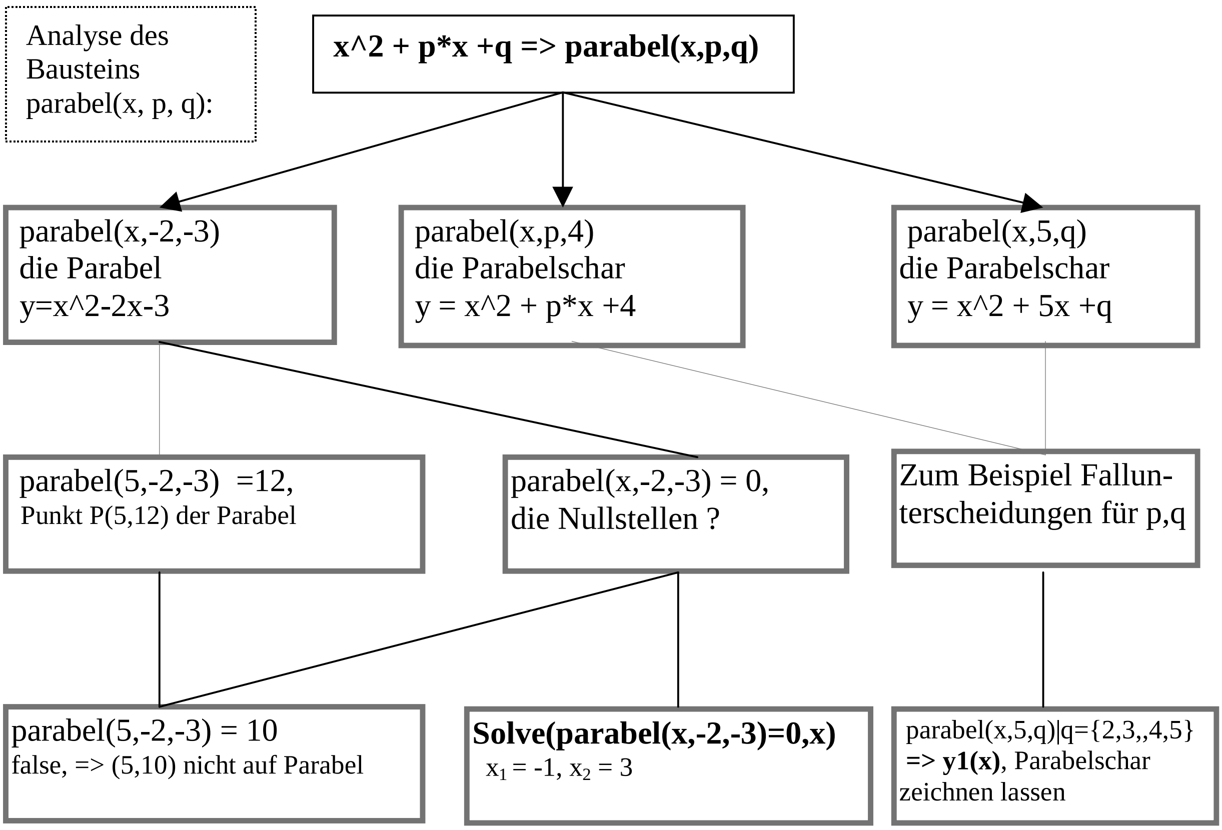


Abb. 3.4-a : Einige Stationen möglicher Bausteinaufrufe mit aktuellen Parametern

4. Warum Bausteine mit Parametern im Unterricht? Unterrichtserfahrungen

Bausteine bringen Terme mit Parametern in eine übersichtliche und kompakte, leicht verwendbare Form.

Erweiterung des Vorrats an Strategien zur Problembearbeitung
Die Suche nach einem Lösungsansatz ist häufig auch die Suche nach einem geeigneten, schon vorhandenen oder noch zu definierenden Baustein.

Allgemeine Lösungen von Problemen rücken wieder mehr in der Vordergrund
Da Bausteindefinitionen in der Regel mit Parametern erfolgen, werden auch die mit Zahlenwerten gestellten Aufgaben schon beim Lösungsansatz häufig verallgemeinert.

Mehr Selbständigkeit bei der Arbeit mit mathematischen Inhalten
Ein vorhandener oder gerade definierter Baustein regt wegen seiner Parameter von sich aus zum Forschen und Entdecken an. Offene Unterrichtsformen unterstützen diesen Ansatz.

Viele Objekte werden gleichzeitig bearbeitet
Der Unterricht wird sich nicht mehr so viel mit einzelnen Objekten beschäftigen. In der Regel können nun auch frühzeitig ganze Klassen von Objekten betrachtet werden (Beispiel: Statt Untersuchungen und Aufgaben zu einer einzelnen Geraden kann es nun solche zu Geradenscharen geben). Dieser Ansatz berücksichtigt die Erkenntnis, dass man aus dem Vergleich mehrerer Objekte und ihrer Strukturierung wesentliche Einsichten gewinnen kann. Dabei wird auch das Überblickswissen gefördert.

Bausteine vernetzen
Jeder Baustein enthält eine eigene kleine „Mathematikwelt“, die auch den Schülerinnen und Schülern deutlich werden kann. An die Stelle vieler Einzelaufgaben tritt nun eine miteinander vernetzte (durch den Baustein) zusammengehörige „Mathematikwelt“.

Die bisher übliche sequentielle Abarbeitung des Lehrplan wird aufgebrochen
zugunsten einer mehr gleichzeitigen Bearbeitung von, für die sich dann auch projektartige Organisationsformen anbieten.

Der Unterricht und die Unterrichtsinhalte werden insgesamt transparenter
Das Bausteinprinzip führt unabhängig vom gerade behandelten mathematischen Gebiet zu einer gemeinsamen Sichtweise und erweist sich damit als ein wesentliche Leitidee.

Die Konstruktion von Bausteinen bereitet funktionales Programmieren vor.
Insofern wird ein Beitrag zum Informatikunterricht geleistet.