Erfahrungen aus dem Thüringer CAS - Projekt

Hans-Joachim Brenner/ Udo Eckert/ Bernd-Günther Kurtz/
Hubert Langlotz/ Wolfgang Moldenhauer/ **Wilfried Zappe**

Zielstellung

Manchmal haben wir Thüringer auch Glück!
So gab es mehrere glückliche Umstände, die zum Beginn des Schuljahres 1999/2000 zu einem recht umfassenden Projekt mit TI-89 im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht der gymnasialen Oberstufe führten.
In diesem Vortrag möchten wir über Zielstellung, Inhalt und erste Ergebnisse dieses Projektes berichten.
Zunächst aber zu den glücklichen Umständen:

- Mit Beginn des Schuljahres 1999/2000 trat in Thüringen ein Lehrplanwerk in Kraft, das in allen Schularten und Fächern einer gemeinsamen Konzeption folgt. „Dieses stellt den Unterricht im einzelnen Fach stark in den Kontext eines gemeinsamen Grundanliegens, das auf die Entwicklung von Lernkompetenz gerichtet ist.“ ((1), S.3) Es war also eine innovationsfreudige Zeit, die uns die Chance gab, dieses Projekt „anzuschieben“. Und wir nutzten die Chance, denn wir waren uns sicher, dass CAS eine wichtige Bedingung für einen lebendigeren und zeitgemäßeren Mathematikunterricht ist.
- Das Thüringer Kultusministerium (TKM) erklärte sich bereit, an den acht teilnehmenden Schulen drei aufeinanderfolgende Jahrgänge mit TI-89 und einigen Zusatzgeräten auszustatten. Das hat eine Menge Geld gekostet!
- Erste Erfahrungen konnte zu diesem Zeitpunkt bereits das „Albert-Schweitzer-Gymnasium“ in Ruhla vorweisen, an dem ein zweijähriges Projekt mit dem TI-92 durchgeführt wurde.
- Es gab eine handvoll Enthusiasten, die nur auf eine solche Gelegenheit wartete und einen Arbeitskreis CAS am Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien (ThILLM) gründeten.

Über das ThILLM wurden im Schuljahr 1999 alle Gymnasien über das geplante Vorhaben informiert. Schließlich gab es acht Gymnasien, die sich zu einer Teilnahme bereit fanden:

Friedrichgymnasium Altenburg
Zabel-Gymnasium Gera
Albert-Schweitzer-Gymnasium Sömmerda
Tilesius-Gymnasium Mühlhausen
Goetheschule Ilmenau (Spezialschulteil)
Albert-Schweitzer-Gymnasium Ruhla
Albert-Schweitzer-Gymnasium Erfurt (Spezialschulteil)
Staatliche Berufsbildende Schule 2 Nordhausen

Durch eine Zusammenlegung von Kursen kam im Schuljahr 2000/2001 das Lerchenberggymnasium Altenburg hinzu.
An jeder dieser Schulen wurden - mit dem Schuljahr 1999/ 2000 beginnend und letztmalig mit dem Schuljahr 2001/ 2002 - alle Schüler[1] der Klassenstufen 10 mit TI-89 ausgestattet. Die Schüler erhalten die Geräte leihweise und können sie in jedem Unterricht, zu Hause und natürlich auch in Klausuren verwenden. Selbstverständlich wird es in Mathematik für diese Schülergruppe ab 2002 und zunächst bis 2004 ein spezifisches „CAS - Zentralabitur“ geben.

[1] Personenbezeichnungen gelten für beide Geschlechter

Unser wichtigstes Ziel ist es zu untersuchen, wie sich unter realen Bedingungen der Einsatz von TI-89 vor allem auf den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht und seine Ergebnisse auswirkt.
Dabei interessieren uns u. a. folgende Fragen:

- Wie nehmen Schüler und Lehrer dieses Hilfsmittel an?
- Ändert sich der Unterricht in der beabsichtigten Weise? (schüler- und prozessorientierter, experimenteller, lebendiger, ...)
- Wie ändern sich Formulierungen und Inhalte von Aufgaben?
- Welche Anforderungen ergeben sich an die Lehrerfortbildung?
- Wie entwickeln sich Schülerleistungen?
- Wie bewährt sich die Technik im Schulalltag?
- Was ist bei der Bewertung von Schülerleistungen zu beachten?

Leider bekam unser Projekt nicht den Status eines Schulversuchs. Eine wissenschaftliche Begleitung findet deshalb nicht statt, so dass wir Antworten auf diese und andere Fragen selbst finden müssen und mit unseren bescheidenen eigenen Kräften abzusichern versuchen.
Nun zu einigen (vorläufigen) Ergebnissen:
Ein Ergebnis ist der CAS – Lehrplan, der grundlegende Kompetenzen mit einem CAS beschreibt. Wir stellten ihn vor allem deshalb zusammen, weil jedes Jahr weitere Lehrer hinzu kommen, die sich z. T. erstmals mit dem Einsatz eines CAS konfrontiert sehen und weil es ein Zentralabitur in Thüringen gibt.

Tests ohne Rechner

Um Aufschluss über Rechner unabhängige „elementare“ Fertigkeiten zu erhalten, führten wir bisher zwei Tests durch, an denen sich alle Schüler der Projektklassen beteiligten, nachdem sie jeweils ein Jahr mit dem TI-89 gearbeitet hatten. Zusätzlich wurden jeweils fünf bis sechs Gymnasien beteiligt, deren Schüler nicht mit TI-89 arbeiteten.
Als Beispiel geben wir den Entwurf eines Testbogens an, der auch Schwerpunkte des Tests deutlich macht:

Leistungskontrolle Klasse 11 (2001) **Gruppe A**

Keine Hilfsmittel zugelassen *Arbeitszeit: 30 Minuten*

Name, Vorname	Klasse	Punktzahl

Rechnen mit Zahlen
Berechnen Sie:
a) $\frac{9^2 - 2^4}{5}$ b) $\log_5 25$ c) $\sqrt{\frac{361}{19^2}}$ d) $3{,}456 \cdot 6 - 0{,}456 \cdot 6$

Umgehen mit Termen
Formen Sie jeweils das Produkt in eine Summe um:
a) $(12 - x) \cdot (y + 2)$ b) $(2a - 3b)^2$
Geben Sie an, für welche Zahlen der Term nicht definiert ist und vereinfachen Sie den Term:
a) $\frac{a+3}{a^2 - 9}$ b) $\frac{m^2 - 2m + 1}{m - 1}$

Gleichungen/ Ungleichungen/ Gleichungssysteme
Ermitteln Sie jeweils die Lösungsmenge!
a) $3x - 29 = 5x + 3$ b) $15 - 2x > 0$ c) $x^2 + 16 = 0$
$x \cdot (2x - 1) \cdot (3x + 3) = 0$

Kenntnisse über Funktionen	
a)	Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen f und g an: $y = f(x) = - x^2$ und $y = g(x) = - x$
b)	Geben Sie an, in welchem Intervall die Funktionen m und n jeweils monoton fallend sind! $y = m(x) = \sin(x)$ $(0 \leq x \leq \pi)$ und $y = n(x) = (x - 1)^2 + 2$
c)	Ein Kapital von 1000 Euro wird mit einem Zinssatz von 4% p.a. für n Jahre $(n \in N;\ n \geq 1)$ fest angelegt. Die am Jahresende anfallenden Zinsen werden dem Guthaben jeweils zugeschlagen und mit verzinst. Es wird nichts abgehoben. Geben Sie eine Funktionsgleichung an, die den Stand des Guthabens nach n Jahren beschreibt.
Geometrie	
a)	Eine Leiter ist a Meter lang. Wie hoch reicht sie, wenn sie in einem Abstand von b Metern an eine Wand gelehnt wird?
b)	Einem Kreis mit dem Radius r ist ein regelmäßiges Sechseck einbeschrieben. Geben Sie den Flächeninhalt des Sechsecks in Abhängigkeit von r an!
Stochastik	
	Es wird einmal mit zwei Würfeln gewürfelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass dabei mindestens eine „Sechs“ geworfen wird.
Modellierung	
a)	Eine Strecke von 176m soll in drei Teilstrecken geteilt werden, wobei die zweite dreimal so lang wie die erste und die dritte viermal so lang wie die zweite sein soll. Wie lang sind die Teilstrecken?
b)	Ein Quadrat A hat die doppelte Fläche eines Quadrates B. Wie viel Prozent ist die Seitenlänge von A breiter als die Seitenlänge von B?

Im Jahr 2000 gab es bei solchen Tests folgende Ergebnisse ((2), S.17):

	Kurs	Anzahl	Erreichte Prozent
Versuchsschulen	GK	231	45,1
	LK	169	60,8
Vergleichschulen	GK	159	39,4
	LK	173	57,3

Die erreichten Ergebnisse sind insgesamt unbefriedigend, weil wir etwas bessere Schülerleistungen erhofft hatten, obwohl die Versuchsklassen etwas besser als die Vergleichsklassen waren.
Die Gesamtübersicht 2001 zeigt ein ähnliches Ergebnis, allerdings zeigen die Versuchsklassen nun etwa die gleichen Defizite wie die Vergleichsklassen:

	Kurs	*Anzahl*	*Erreichte Prozent*
Versuchsschulen	GK	271	33,7
	LK	245	49,6
Vergleichsschulen	GK	179	33,6
	LK	117	50,6

Bei der Konstruktion des zweiten Tests war vereinbart worden, dass sich der Test in starkem Maße an den des Vorjahres anlegt, um möglichst gute Vergleichbarkeit über die Jahre hinweg abzusichern. Das Gesamtergebnis 2001 ist in Bezug auf richtige Schülerlösungen schlechter als im letzten Jahr. Uns stellt die Tatsache, dass die Schüler aus den Versuchs- und den Vergleichsklassen die Anforderungen aus den Testaufgaben nur etwa zu einem Drittel (Grundkurs) bzw. zur Hälfte (Leistungskurs) richtig lösen konnten, überhaupt nicht zufrieden!

Umfrage unter den Schülern

Um eine erste Antwort auf die Frage zu bekommen, wie die Schüler den TI-89 annehmen und wie sie den Unterricht mit diesem Hilfsmittel selbst reflektieren, führten wir im August 2001 eine vom TKM genehmigte Umfrage unter den Schülern durch, die den Rechner seit einem bzw. seit zwei Jahren im Unterricht verwendeten. Dazu setzten wir folgenden Fragebogen ein:

THILLM *August 2001*
Arbeitskreis Computeralgebrasysteme

Befragung zum Einsatz des TI-89 im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht

Liebe Schülerinnen und Schüler,

Sie arbeiten seit längerer Zeit im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht mit dem TI-89. Um auch Ihre Erfahrungen in die weitere Arbeit einzubeziehen, ist uns Ihre Meinung wichtig. Wir bitten Sie, die nachfolgenden Fragen zu beantworten.

Bitte kreuzen Sie das Zutreffende an! *Geschlecht männlich* ☐ *weiblich* ☐

Ich besuche zur Zeit die Klassenstufe 11 ☐ *Klassenstufe 12* ☐

Ich habe im Mathematikunterricht den Grundkurs ☐ *den Leistungskurs* ☐ *belegt.*

Meine letzte Zeugniszensur in Mathematik war: ☐

		trifft voll zu					*trifft überhaupt nicht zu*
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	*Der Umgang mit dem TI-89 bereitet mir <u>keine</u> großen Probleme.*						
2	*Der TI-89 erhöht für mich die Anschaulichkeit beim Aufgabenlösen.*						
3	*Der TI-89 hilft mir, Fehler zu vermeiden.*						
4	*Durch die Nutzung des TI-89 kann ich schneller arbeiten.*						
5	*Den TI-89 nutze ich auch in anderen Fächern.*						
6	*Der TI-89 bringt mir ein Gefühl höherer Sicherheit beim Lösen von Aufgaben.*						
7	*Der TI-89 gibt mir mehr Möglichkeiten der Kontrolle von Lösungen.*						
8	*Mathematikunterricht gefällt mir gut*						

Ich würde mich wieder für einen Unterricht mit TI-89 entscheiden: Ja ☐ *Nein* ☐

Bitte begründen Sie Ihre Entscheidung:

Und was ich sonst noch sagen wollte:

Hier nun einige Antworten. Angegeben wird jeweils die von den Schülern erteilte „Durchschnittsnote“. (N bezeichnet die Gesamtzahl der jeweils abgegebenen Antworten.)

Frage	GK 11 N= 221	GK 12 N=195	LK 11 N=230	LK 12 N=200
Der Umgang mit dem TI-89 bereitet mir keine großen Probleme.	2,58	2,55	2,12	2,05
Der TI-89 erhöht für mich die Anschaulichkeit beim Aufgabenlösen.	2,37	2,18	2,17	2,19
Der TI-89 hilft mir, Fehler zu vermeiden.	2,73	2,63	2,64	2,50
Durch die Nutzung des TI-89 kann ich schneller arbeiten.	2,13	2,02	1,84	1,81
Den TI-89 nutze ich auch in anderen Fächern.	2,78	3,18	2,07	2,49
Der TI-89 bringt mir ein Gefühl höherer Sicherheit beim Lösen von Aufgaben.	2,45	2,51	2,37	2,43
Der TI-89 gibt mir mehr Möglichkeiten der Kontrolle von Lösungen.	2,21	1,98	1,96	1,90
Mathematikunterricht gefällt mir gut	3,68	3,17	1,97	2,45

Das sind subjektive Schülermeinungen, bei denen zu berücksichtigen ist, dass die befragten Schüler in der gymnasialen Oberstufe nur den Mathematikunterricht mit TI-89 kennen. Insgesamt ergibt sich eine positive Wertung durch die Schüler, wenn man von der Beliebtheit des Faches Mathematik im Grundkurs absieht.
Noch eindeutiger wird das Ergebnis, wenn man die Antworten auf die Frage

„Ich würde mich wieder für einen Unterricht mit TI-89 entscheiden.“

bilanziert.
Mit „Ja“ antworteten:

GK 11	87%
LK 11	89%
GK 12	82%
LK 12	83%

Das ist u.E. ein starkes positives Votum!
Leider fehlt uns die Zeit und die Kraft, die Fragebogen noch detaillierter auszuwerten, z. B. bezüglich der Mathematiknote oder des Geschlechts der Schüler.

Bei den verbalen Einschätzungen kam es u. a. zu folgenden Aussagen (Auszug):

Negativ: Die spätere Verwendung, z. B. die Zulassung solcher Rechner im Studium, ist an den Universitäten und Hochschulen sehr unterschiedlich geregelt.
Die Erlernung /Handhabung des Gerätes ist mühsam.
Man wird vom Taschenrechner abhängig.

Positiv: Mathematikunterricht mit TI-89 macht mehr Spaß.
Man kann schneller, anschaulicher, fehlerfreier rechnen.
Die Konzentration auf das Wesentliche in der Mathematik nimmt zu.
Der Unterricht ist anders geworden- mehr Theorie und weniger Rechnungen, da dieses der TI-89 übernimmt.
Man darf nicht den Fehler machen und den Rechner dort benutzen, wo man die Aufgabe genauso gut ohne TI-89 lösen könnte.

Lehrermeinungen
Hierzu haben wir keine Umfrage durchgeführt. Da sich einige Kollegen regelmäßig im Arbeitskreis CAS sehen, wissen wir über grundlegende Positionen gut Bescheid. Es gibt eine überwiegend positive Resonanz, die auch dadurch deutlich wird, dass alle am Projekt beteiligten Schulen an das TKM den Antrag stellten, das Projekt über das Jahr 2004 hinaus fortsetzen zu dürfen. Es gibt aber auch eine kleine Gruppe sehr kritischer Kollegen im Arbeitskreis, die das Projekt an ihrer Schule abbrechen wollten. Allerdings ist ihr Antrag dazu in der Schulkonferenz des betreffenden Gymnasiums gescheitert, so dass auch dort das Projekt fortgesetzt wird.

Lehrerfortbildung
Nach der Erstellung eines Argumentationspapiers zur Sinnhaftigkeit eines Schulversuchs (es wurde dann ein Projekt zur Schulentwicklung) wird nachstehend eine Übersicht über die Aktivitäten in der Lehrerfortbildung gegeben, in welche die oben genannten Schulen einbezogen waren. Für alle von den Schulen benannten Teilnehmer wurde zunächst ein „Einführungslehrgang“ angeboten. Im Vordergrund stand dabei das Kennenlernen des TI-89 mit seinen Möglichkeiten (Referenten: Kutzler, Leonding; Berntzen, Münster; Kurtz, Mühlhausen; Zappe, Ilmenau; Eckert, Altenburg). Dem gleichen Personenkreis wurde ebenfalls ein Lehrgang „Unterrichtsbeispiele in Klassenstufe 10“ offeriert (Referenten: Amelung, Bochum; Langlotz, Ruhla; Baumann, Celle; Eckert; Kurtz). Der Schwerpunkt dieser Veranstaltung bestand in der Nutzung des TI-89 auf der Basis des weiterentwickelten Thüringer Lehrplans Mathematik/Gymnasium. Die Fortbildungsreihe wurde durch einen CBL/CBR-Lehrgang abgeschlossen (Referent: Keunecke, Kiel). Dieses Angebot richtete sich vorrangig an Physiklehrer.
Die Erfahrungen der Fortbildung im ersten Projektjahr lehrte, dass es auswärtigen Referenten schwer fällt, sich auf die konkrete Unterrichtssituation in Thüringen einzustellen. Daher wurde in den Folgejahren vermehrt auf eigene Referenten zurückgegriffen. Zudem wurde das inhaltliche Angebot modifiziert. Neben dem „Einführungslehrgang“ und dem Lehrgang „Unterrichtsbeispiele in Klassenstufe 10“ wurden die analogen Lehrgänge für „Unterrichtsbeispiele in Klassenstufe 11 und 12“ angeboten. Zusätzlich zu diesem direkt auf den Unterricht konzentrierten Angebot wurden externe Experten eingeladen. So berichtete Scheu, Pforzheim, über das „Pilotprojekt Mobiles Klassenzimmer“ und Heugl, Wien, stellte für die Zielgruppen Aufsicht (Thüringer Kultusministerium, Staatliche Schulämter), Fachberater und Fachleiter Mathematik für die Gymnasien und berufsbildenden Schulen und für die Projektgruppe die Ergebnisse des Projektes in Österreich vor. Natürlich ist auch die kontinuierliche Arbeit im Arbeitskreis CAS zu erwähnen, die besonders unterrichtsnah angelegt war.

Veränderungen im Mathematikunterricht
Im Arbeitskreis CAS wurde ein Thesenpapier zu den Veränderungen im Mathematikunterricht entwickelt:
Thesen zu Veränderungen im Mathematikunterricht am Gymnasium durch Einsatz eines CAS - Rechners (TI-89) ab Klasse 10 - Entwurf/Diskussionspapier (Stand: 14. September 2001)

Die nachfolgenden Feststellungen resultieren aus den Unterrichtserfahrungen von zwei Schuljahren Mathematikunterricht mit CAS - Rechnern.

- Klasse 7 bis 9	*- Einsatz des üblichen (nicht programmierbaren bzw. grafikfähigen) Taschenrechners*
- Klasse 10, 11	*- Verwendung des Rechners TI-89*

1. Verkürzung von Rechenarbeit

- *Komplizierte und aufwändige Rechenoperationen entfallen in vielen Fällen, daher kann die Erfolgssicherheit beim Lösen von Aufgaben auch bei leistungsschwächeren Schülern steigen (ein Teil bisher beherrschter (Kopf-)rechenfähigkeiten wird wie z. B. Auflösen von linearen, quadratischen, speziellen Gleichungen... zurückgehen, da solche schriftlichen Umformungen nur noch in vermindertem Umfang geübt werden).*
- *Mit dem nunmehr reduzierten Aufwand für bisher übliche Rechenschritte sinkt aber der bisher übliche Gesamtpunkte-Wert einer Aufgabe.*
- *Ein Aufrüsten der Aufgabe durch zum Beispiel größere Problemkomplexität oder verstärkte Aufnahme von Theorieelementen u. ä. ist im geringen Umfang für den leistungsstärkeren Teil einer Schülergruppe erfolgreich praktizierbar.*
- *Mit gutem Erfolg lässt sich dagegen der Fortfall von Rechenschritten kompensieren, wenn die Aufgabenstellung die Schüler zur Planung und Analyse der einzelnen Lösungsschritte anhält. Deren knappe und strukturierte Niederschrift, die Reflexion des eingeschlagenen Lösungsweges sowie eine kritische Wertung der Ergebnisse sollte – wo dies sinnvoll ist- ein normaler zu bewertender Bestandteil einer Schülerlösung sein.*

2. Stärkung der Vorstellungskraft

- *In der Vergangenheit konnte den Schülern ein Sachverhalt wie z. B. die Erarbeitung des Grenzwertbegriffes nur durch verbale Beschreibung – ergänzt durch einzelne Abbildungen in Lehrbüchern – schrittweise vermittelt werden.*
- *Durch einfache Simulationsbeispiele mit Hilfe des TI-89 können nunmehr solche Vorgänge für die Schüler als Prozess erlebbar gemacht werden (u. a. Übergang von Sekanten in genau eine Tangente für h gegen 0...; Stabilisierung von relativen Häufigkeiten für n gegen unendlich).*

3. Einfluss des TI-89 auf die Herausbildung von mathematischem Verständnis

- *Bei Verwendung des TI-89 wird – wie bereits festgestellt – die Ausführlichkeit eines vom Schüler notierten Lösungsweges z.T. deutlich reduziert sein.*
- *Es lässt sich trotz eines „Defizits an Rechenpraxis“ dennoch feststellen, dass ein tieferes Verständnis für innermathematische Zusammenhänge erreicht werden kann, wenn im Mathematikunterricht des Gymnasiums mit Hilfe des neuen Arbeitsmittels TI-89 verschiedene Lösungswege, ein größeres Aufgabenspektrum, weitgehende selbstständige Untersuchungen zum Einfluss von Parametern oder auch die Möglichkeiten, kompliziertere funktionale Zusammenhänge rationell zu untersuchen im normalen Unterricht eine gewichtigere Rolle spielen.*

4. Bilanz/ Vorhaben

- *Der bisherige Einsatz des neuen Arbeitsmittels TI-89 ist insgesamt betrachtet ermutigend; bei Abwägung der Vor- und Nachteile eines flächendeckenden Einsatzes eines CAS - Rechners kann gegenwärtig von einem wirksamen Beitrag zur Entwicklung von Lernkompetenz ausgegangen werden.*
- *Eine umfassende Diskussion über Akzente eines veränderten Mathematikunterrichts ist notwendig.*
- *Die Fortsetzung und Ausdehnung des Projektes ist mehrheitlich wünschenswert.*

Änderungen von Aufgabenstellungen

Einige Beispiele sollen die veränderte Situation verdeutlichen.
Beispiel 1 (Klasse 10) veranschaulicht den Stellenwert, den das Experimentieren, Beschreiben und Interpretieren bekommen kann.
Eine Funktion $f_{a;b;c}$ *mit der Gleichung* $y = f_{a;b;c}(x) = a \cdot 10^{-b \cdot x} + c$ mit $a, b, c, x \in \Re$ und $a > 0, b > 0$ *kann als „Abklingfunktion“ bezeichnet werden.*

a) *Untersuche verschiedene Repräsentanten von* $f_{a;b;c}$. *Begründe den Namen „Abklingfunktion“.*
b) *Von einer der Funktionen* $f_{a;b;c}$ *ist bekannt: Der Graph von* $f_{a;b;c}$ *hat die waagerechte Asymptote y = 2 und er geht durch die Punkte (1; 6) und (3; 4). Bestimme a, b und c. Zeichne den Graph auf Millimeterpapier im Intervall [-1; 8] (1LE = 2 cm)*
c) *Die Funktion* $f_{50;0,5;0}$ *fassen wir auf als den Zerfallsvorgang einer Bakterienkultur. Die Zeit t sei dabei in Stunden angegeben,* $f_{50;0,5;0}$ *(t) gebe die Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt t an. Beschreibe die Bedeutung der Parameter a, b und c für diesen speziellen Fall. Berechne die Halbwertszeit dieses Zerfallvorganges.*
Untersuche, ob man $f_{50;0,5;0}$ *(-1) in diesem Zusammenhang eine inhaltliche Bedeutung geben kann.*

Beispiel 2 (Klasse 12) soll Ansätze für die Veränderung von Abituraufgaben verdeutlichen.

Abitur Thüringen 2000, Mathematik Leistungsfach, Analysis 1.1

Für jede reelle Zahl a (a > 0) ist eine Funktion f_a *gegeben durch* $y = f_a(x) = a \cdot \ln(x^2 + a) - a \ (x \in R)$.
In der Originalaufgabe waren mit Symmetrieuntersuchungen, Bestimmung von Achsenschnittpunkten, Extrem- und Wendepunkten sowie der Skizze für a = 2 bzw. a = 3 insgesamt15 BE zu erreichen. Mit TI-89 ist dieser hohe Anteil an BE nicht zu vertreten. Deshalb kann ein „Auffüllen“ mit neuen, lehrplangerechten Inhalten notwendig sein.

Mögliche Ergänzungen:

a) *Ermitteln Sie für die Funktion* f_2 *im Intervall* $0 \le x \le 3$ *eine ganzrationale Näherungsfunktion y = n(x) =* $b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$.
Berechnen Sie den größten Wert der Funktion $d(x) = \left| f_2(x) - n(x) \right|$ *im Intervall* $0 \le x \le 3$.
Geben Sie mit Hilfe der Funktion n eine Näherungsfunktion für f_2 *im Intervall* $-3 \le x \le 0$ *an.*

b) *Der Graph f im Bild 1 berührt die x-Achse im Ursprung und ist das Bild einer der Funktionen* f_a.
Geben Sie eine Funktionsgleichung für f an.
Der Graph von g ist durch Spiegelung und Verschiebung aus f entstanden.
Untersuchen Sie diesen Zusammenhang genauer und ermitteln Sie eine Funktionsgleichung für g.

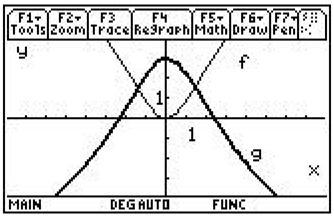

Bild 1

Beispiel 3 (Klasse 10)dient der Wiederholung von Parametern einer linearen Funktion, der Schnittpunktsberechnung, der Orthogonalitätsbedingung und von Sätzen der Elementargeometrie.

Gegeben sind die Gleichungen von 4 Geraden.

$$g_1:\ y=\frac{1}{8}\cdot x+\frac{11}{8}\qquad \mathrm{g}_2:\ 4y+7x=43\qquad g_3:\ 8y-x=71\qquad g_4:\ y=-\frac{7}{4}\cdot x+\frac{103}{4}$$

a) Bestimmen Sie alle Schnittpunkte dieser Geraden!

b) Welche Figur wird durch diese Schnittpunkte bestimmt? Klassifizieren Sie so genau wie möglich! (Beweisen Sie Ihre Aussage!)

c) Welchen Winkel schließen die Diagonalen ein? (Beweis!)

d) Weisen Sie nach, dass der Schnittpunkt der Diagonalen auf einem Kreis um den Ursprung mit einem Radius von $\sqrt{85}$ *liegt!*

Durch die Anwendung eines CAS wird die Zeit, die man ansonsten für die Berechnung der Schnittpunkte aufwenden müsste, zum größten Teil eingespart und kann für eine weitgehendere Untersuchung der Figur der Schnittpunkte genutzt werden. Konkret ergab sich eine rege Diskussion über die Möglichkeiten der Definition eines Rhombus und über die Äquivalenz dieser Aussagen.

Beispiel 4 (Klasse 11) dient der Hinführung zum Arbeiten mit Zahlenfolgen und dem Summenzeichen sowie des Findens des allgemeinen Summanden.
Bestimmen Sie jeweils die Summe der folgenden endlichen Zahlenfolgen!
Wie viele Summanden müssen addiert werden?

5, 8, 11, 14,..., 284, 286
4646, 4633, 4620, 4607,..., 70, 57
1, 4, 9, 16,..., 900, 961
3, 7, 13, 21, 31, 43,..., 421, 463

Solche Aufgaben sollten erstmals in Klasse 5 bzw. 6 anhand von arithmetischen Zahlenfolgen erster Ordnung gelöst werden. Für angehende Abiturienten steht natürlich die Festigung der Kenntnisse über Zahlenfolgen im Mittelpunkt. Der Ausgangspunkt ist eine einfache Aufgabe, mit deren Hilfe man stets auf das Wesentliche zurückkommt und dieses einübt. Durch Anwendung des CAS erhalten solche konkreten Beispiele einen geringeren Stellenwert und es bleibt deshalb mehr Zeit zur allgemeinen Betrachtung des Problems. Immer wieder sollte der abstrakte Gehalt solcher Aufgabenstellungen den Schülern verdeutlicht und abverlangt werden. Genau das ist eine Chance, die CAS eröffnet: Der Abstraktionsgrad der Betrachtungen im Mathematikunterricht kann deutlich erhöht werden!
Durch den Einsatz von CAS ist die Wertigkeit der mündlichen Leistungskontrolle deutlich größer geworden. An die obigen Aufgaben könnten z. B. die folgenden anschließen (oder besser: beides zu einer Aufgabenstellung zusammenfassen).
Definieren Sie arithmetische Zahlenfolgen 1. Ordnung explizit und rekursiv!
Leiten Sie eine Darstellung für die Summe der ersten n Glieder der Zahlenfolge (n-te Partialsumme) her!
Bearbeiten Sie diese Aufgaben für arithmetische Zahlenfolgen 2. Ordnung!

In der Vorbereitung auf die Leistungskontrolle ist Gruppenarbeit erwünscht, denn davon profitieren alle Schüler, die leitungsstarken wie die leistungsschwachen!

Beispiel 5 (Klasse 11/12) ist gedacht für die Festigung der Kenntnisse über den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und der Wiederholung des Darstellens eines Teilpunktes bei gegebenem Teilverhältnis.

a) Gegeben sei die Funktion f : $f(x) = x^3$ mit $D(f) = [a,b]$

a1) Erläutern Sie die Aussage des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung angewandt auf f *für* $a \cdot b < 0$ *anhand einer Skizze.*

a2) Bestimmen Sie a und b so, dass die Zwischenstelle das Intervall [a; b] im Verhältnis 1:2 teilt.

Die Aufgabe ist aus dem Bemühen heraus entstanden, dem Mittelwertsatz im Unterricht einen bedeutenderen Platz einzuräumen. (Weiterhin wurde das Lösen von Gleichungen mittels Iteration behandelt – hinreichende Konvergenzbedingung.) Sie wurde in einer Kursarbeit gestellt und anhand einer ähnlichen Aufgabe ($y = x^2$ – kann das Verhältnis 3:5 betragen?) vorbereitet. Durch den Einsatz eines CAS gelangt man deutlich schneller zum Wesentlichen. Nicht die Termumformungen (Zeitaufwand, fehlerhaftes Rechnen) stehen im Mittelpunkt, sondern die Aussage des Mittelwertsatzes wird permanent wiederholt und vielfältig verdeutlicht.

Im Zusammenhang mit diesem Beispiel soll noch eine These zum Thema „Termumformungen“ zur Diskussion gestellt werden.

Auf welche der bisher in der Schule behandelten Termumformungen können wir wegen des Einsatzes von CAS verzichten? Wohl auf keine einzige! Schüler, die Mathematik oder Physik studieren wollen, müssen Termumformungen sicher beherrschen. Und alle anderen Schüler sollten sie im Prinzip auch kennen! Der Umfang der Einübung solcher Techniken ist geringer geworden, aber die Besten müssen mit komplizierteren Termen auch ohne den Einsatz von CAS umgehen können. Da der CAS - Rechner zur Hand genommen werden kann, haben alle anderen ebenso eine reelle Chance, wenn ihnen das Wesentliche bewusst ist. So ist es z. B. in der Aufgabe a2 günstig, den Differenzenquotienten als Summe zu schreiben. Die Termumformungen für die Summanden wurden im Unterricht behandelt. Den leistungsstarken Schülern sollte klar sein, dass Terme wie $x^3 - y^3$ faktorisierbar sind. Allen Schülern hingegen sollte die Faktorisierung von Termen der Form $a^2 - b^2$ gelingen.

Ob Mathematikunterricht mit oder ohne CAS: Das Wichtigste für Erfolg bleibt u. E. die Entwicklung einer guten Lerneinstellung. Dazu kann der Mathematikunterricht mit CAS - Rechnern sehr viel beitragen, wenn sein Einsatz methodisch geschickt erfolgt. Und um auf den Anfang unserer Ausführungen zurück zu kommen: Dies ist zum großen Teil keine Glückssache, sondern Ergebnis pädagogischen Einfallsreichtums und Engagements.

(1) „Was ist neu an den Thüringer Lehrplänen?“, Broschüre des ThILLM, 1998

(2) Moldenhauer, W., „Die Zukunft ist anders! – Der Einsatz von Computeralgebrasystemen (CAS) im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht der gymnasialen Oberstufe“ In: Katalog Fort- und Weiterbildung für allgemein bildende und berufsbildende Schulen, August 2001 bis Februar 2002; ThILLM Bad Berka, S. 12 - 18