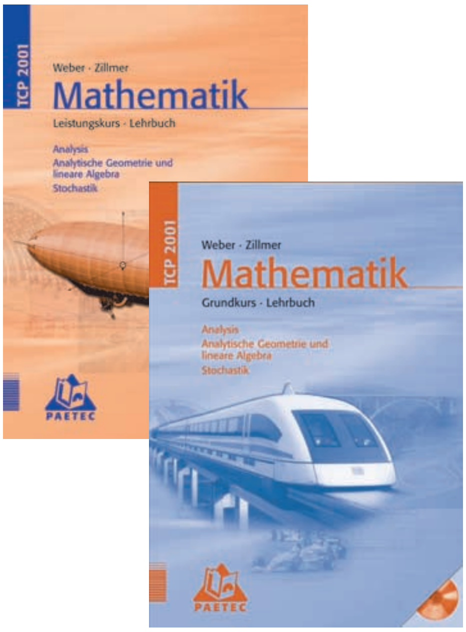
Das TCP 2001 –
ein Mathematiklehrbuch für die Oberstufe
mit CAS und CD-ROM

Hubert Bossek, PAETEC Verlag für Bildungsmedien, Berlin



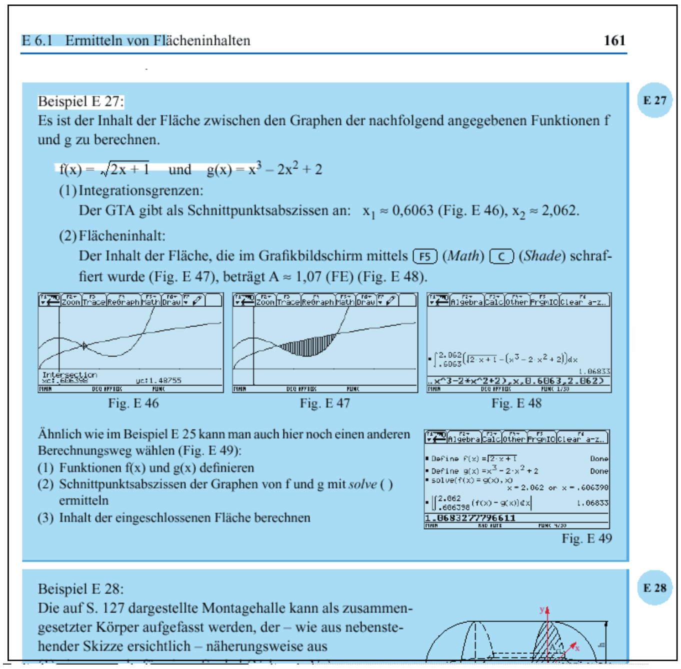
Theoria cum praxi – ein Name, ein Programm

Die Lehrwerke TCP 2001 für den Grund- und Leistungskurs stellen eine **Verbundlösung** für den gesamten Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe dar. Sie umfassen jeweils ein **Lehrbuch**, ein **Aufgabenbuch** und eine **CD-ROM**, die jedem Lehrbuch beigefügt ist und mit ihren Ergänzungen die Einsatzmöglichkeiten der Lehrwerke bedeutend vergrößert.

Die Lehrbücher bieten grundlegende **Theorie**elemente aus den drei Hauptgebieten des gymnasialen Mathematikunterrichts an. Zahlreiche Beispiele und grafische Darstellungen unterstützen das Lernen. **Praxis**bezüge bilden Ausgangs- und Bezugspunkte der jeweiligen Erörterungen.

In die Stoffdarstellung integriert ist der Einsatz von **Grafikrechnern mit Computeralgebrasystemen** als Hilfsmittel beim Lösen von ausgewählten Problemen. Dabei stellt die Rechnernutzung keine Voraussetzung, sondern lediglich eine (mitunter sehr zeitsparende) Unterstützung bei der Arbeit mit den Lehrbüchern und bei der Konzentration auf mathematisch Wesentliches dar.

Mithilfe der Mathematiksoftware **Mathcad**, die als Explorerversion auf jeder CD-ROM enthalten ist, können die Lehrbuchbeispiele und weitere gleichartige Aufgaben bearbeitet werden.



E 6.1 Ermitteln von Flächeninhalten 161

E 27

Beispiel E 27:
Es ist der Inhalt der Fläche zwischen den Graphen der nachfolgend angegebenen Funktionen f und g zu berechnen.

$f(x) = \sqrt{2x+1}$ und $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2$

(1) Integrationsgrenzen:
Der GTA gibt als Schnittpunktsabszissen an: $x_1 \approx 0{,}6063$ (Fig. E 46), $x_2 \approx 2{,}062$.

(2) Flächeninhalt:
Der Inhalt der Fläche, die im Grafikbildschirm mittels F5 (*Math*) C (*Shade*) schraffiert wurde (Fig. E 47), beträgt $A \approx 1{,}07$ (FE) (Fig. E 48).

Fig. E 46 Fig. E 47 Fig. E 48

Ähnlich wie im Beispiel E 25 kann man auch hier noch einen anderen Berechnungsweg wählen (Fig. E 49):
(1) Funktionen f(x) und g(x) definieren
(2) Schnittpunktsabszissen der Graphen von f und g mit *solve* ( ) ermitteln
(3) Inhalt der eingeschlossenen Fläche berechnen

Fig. E 49

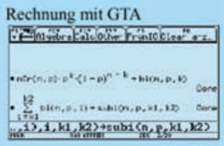
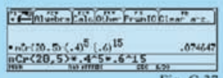
E 28

Beispiel E 28:
Die auf S. 127 dargestellte Montagehalle kann als zusammengesetzter Körper aufgefasst werden, der – wie aus nebenstehender Skizze ersichtlich – näherungsweise aus

Mit dem TCP 2001 sollte ein Mathematik-Lehrwerk entstehen,
- *das neue Entwicklungen berücksichtigt und gleichsam neue Wege aufzeigt,*
- *das gleichermaßen den unterschiedlichen Bedingungen an den Schulen entspricht*
- *und deshalb auch dann im Unterricht eingesetzt werden kann, wenn sich GTR und CAS im Unterricht noch im Anfangsstadium befinden oder noch gar nicht zur Verfügung stehen.*

In beiden Lehrbüchern wird an repräsentativen Beispielen gezeigt, wie sich Grafikrechner (mit und ohne CAS) zur Bearbeitung der jeweiligen Probleme nutzen lassen. Das betrifft den Einsatz des Rechners sowohl als Rechenhilfsmittel als auch als didaktisches Werkzeug (Ansatzfindung oder Kontrolle durch Visualisierung, sinnvolles Probieren, Simulation, ...).
Auch wenn – zumindest in längerfristiger Tendenz – das formal-algorithmisch-kalkülmäßige Element in seiner Bedeutung für die mathematische Allgemeinbildung zurücktritt, wird es dennoch weiterhin unverzichtbar sein, auch bez. solcher Elemente, die entsprechende Rechner viel schneller und bei sachgerechtem Gebrauch auch sicherer bewältigen können, ein grundlegendes Können im Umgang mit mathematischem Handwerkszeug herauszubilden. Deshalb sind i. d. R. auch Beispiele, die mithilfe eines GTR gelöst wurden, auf traditionelle Weise durchgerechnet.

Beispiel G 46: **Berechnungsmöglichkeiten für binomialverteilte Zufallsgrößen**
Zufallsexperiment: BERNOULLI-Kette der Länge n und mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p
Zufallsgröße X: zufällige Anzahl der Erfolge
$X \sim B_{n;\,p}$, d.h. $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
Beispiel: n = 20, p = 0,40

	Rechnung mit GTA	Tabelle für $B_{n;\,p}(\{k\})$	Tabelle für $B_{n;\,p}(\{0; \ldots; k\})$
	 Fig. G 36		
$P(X = k)$ $k = 5$	$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$  Fig. G 37  Fig. G 38	$B_{n;\,p}(\{k\})$ n = 20 k: 5; p = 0,40: 0,07465	$B_{n;\,p}(\{0; \ldots; k\}) - B_{n;\,p}(\{0; \ldots; k-1\})$ n = 20 k: 4; p = 0,40: 0,05095 k: 5; p = 0,40: 0,12560 Differenz: 0,07465

Der TI-92 als Formelspeicher und Tabellenersatz beim Berechnen binomialer Wahrscheinlichkeiten

Die Lehrbücher haben nicht die Aufgabe, in die Grundlagen des Arbeitens mit GTR/CAS einzuführen. Das schließt aber nicht aus, in ausgewählten Fällen die GTR-Nutzung durch exakte Angabe der Schritt- bzw. Tastenfolgen oder durch Wiedergabe mehrerer Bildschirme verständlich und nachvollziehbar zu machen. Sicher wird eine solche Art der Lösungsdarstellung auch die Herausbildung des Könnens beim Arbeiten mit den Geräten an sich unterstützen – aber eben nur als Nebeneffekt.

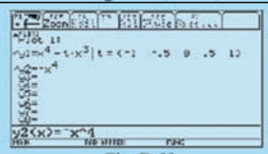


Fig. D 58


Fig. D 59

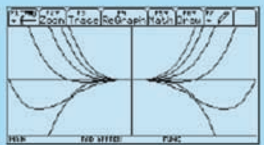


Fig. D 60

Die Schirmbilder D 58, D 59 und D 60 zeigen, wie mit dem TI-92 Kurvenscharen gezeichnet werden.

Beispiel F 63:
Gegeben sind im Raum die zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Es ist das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren und die Größe des von ihnen eingeschlossenen Winkels zu berechnen.
Nach Satz F 25 gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 = -1.$
Zur Berechnung des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkels formen wir die Definitionsgleichung für das Skalarprodukt (vgl. Definition F 18) nach $\cos\alpha$ um und erhalten: $\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.
Mit $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$ und $|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{29}$ ergibt sich
$\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{29}}$, woraus $\cos\alpha \approx -0{,}0496$ und damit
$\alpha \approx 92{,}84°$ folgt. In Fig. F 130 (Zeile 1 bzw. Zeilen 2 bis 4) sind beide Rechnungen mit dem GTA dargestellt. Dabei wird die Funktion *dotP(* des GTA aus dem MATH/Matrix/Vektor ops-Menü für die Berechnung des Skalarprodukts und die Funktion *norm(* aus dem MATH/Matrix/Norms-Menü verwendet.

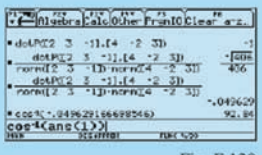


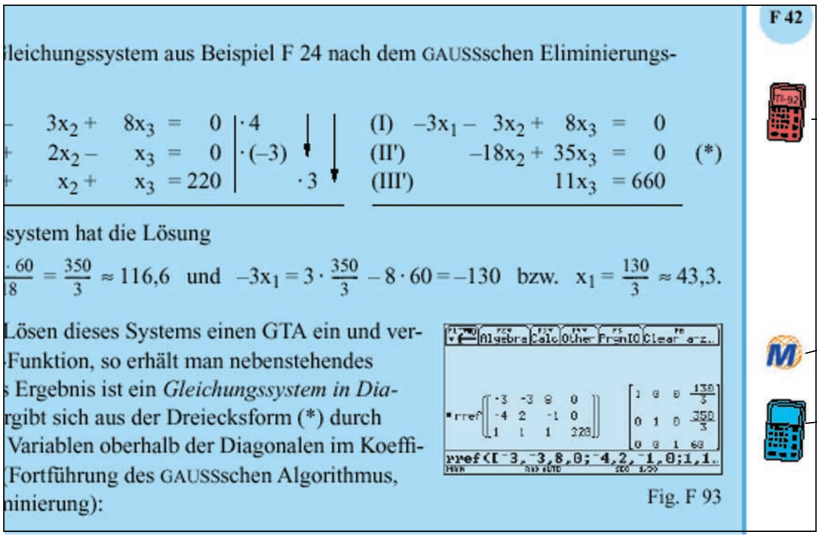
Fig. F 130

Die ausführliche Lösung wird hier durch spezielle Hinweise zur Verwendung des Rechners ergänzt.

Die CD-ROM (Grundkurs) enthält folgende Inhalte:

- **PDF-Fassung des kompletten Lehrbuchs** zum Nachlesen, Ausdrucken oder Kopieren, aber auch zum Navigieren auf der CD
- **Ergänzende Stoffgebiete** z. B. zu den Themen „Beweisen“, „Komplexe Zahlen“, „Kegelschnitte“ oder „Abbildungen und Matrizen“
- **Hinweise für die Anwendung des GTR TI-92** beim Lösen von Aufgaben aus der Analysis, der Analytischen Geometrie und linearen Algebra sowie der Stochastik
- Bearbeitung der **Lehrbuchbeispiele mit anderen Grafikrechnern**
- **Hinweise und Empfehlungen zum Einsatz der Software Mathcad**
- **Mathematik und Mathematiker** Biografien, Übersichten und Abrisse zur Geschichte ausgewählter mathematischer Sachgebiete
- **Merkzettel** Wege zum Lösen von Standardproblemen in prägnanter, übersichtlicher Form

In der PDF-Fassung des Lehrbuchs gesetzte **Links** führen direkt zu den TI-92-Hinweisen, zu den anderen Grafikrechnern oder zu Mathcad:

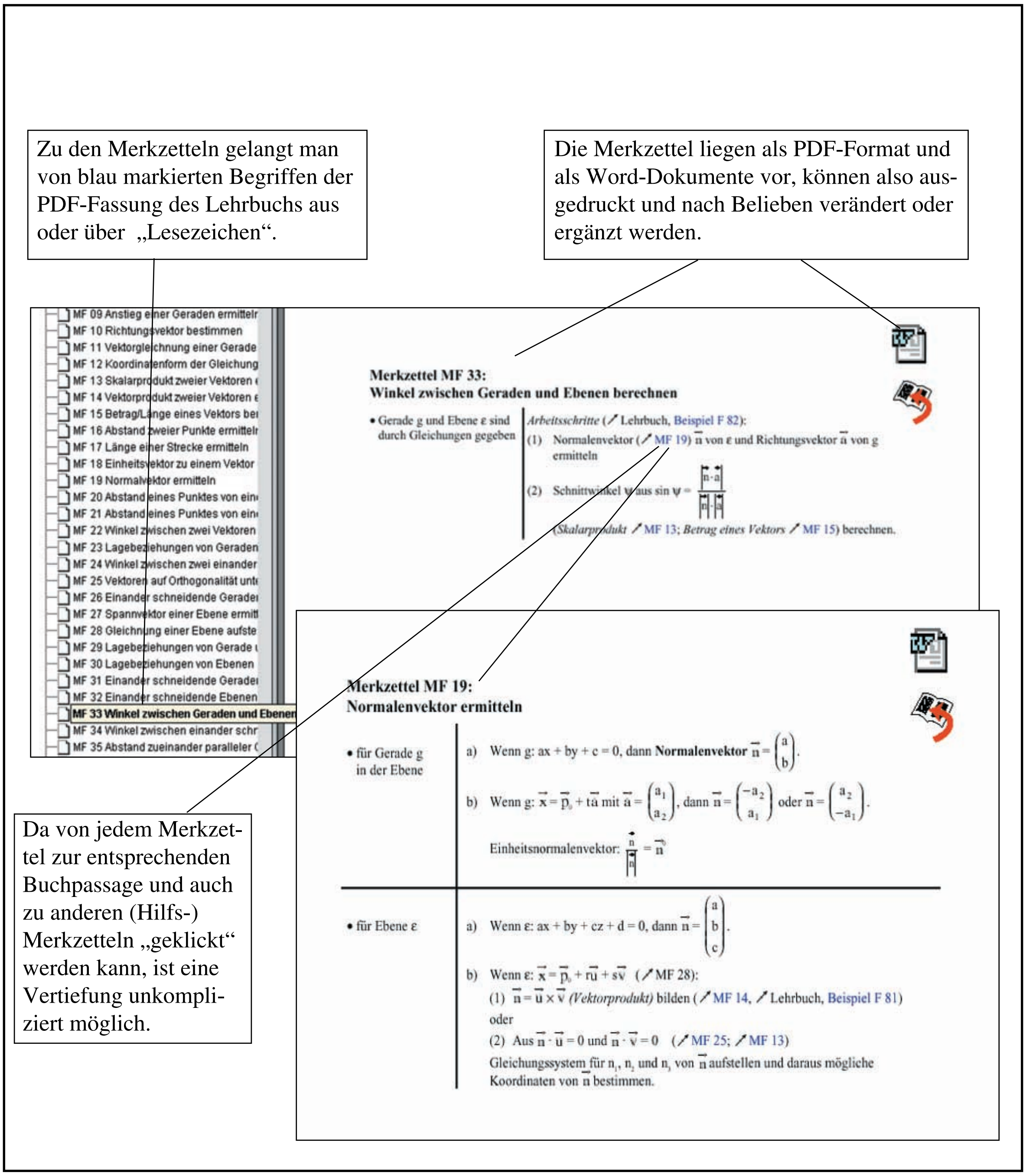


Hinweise zum TI-92

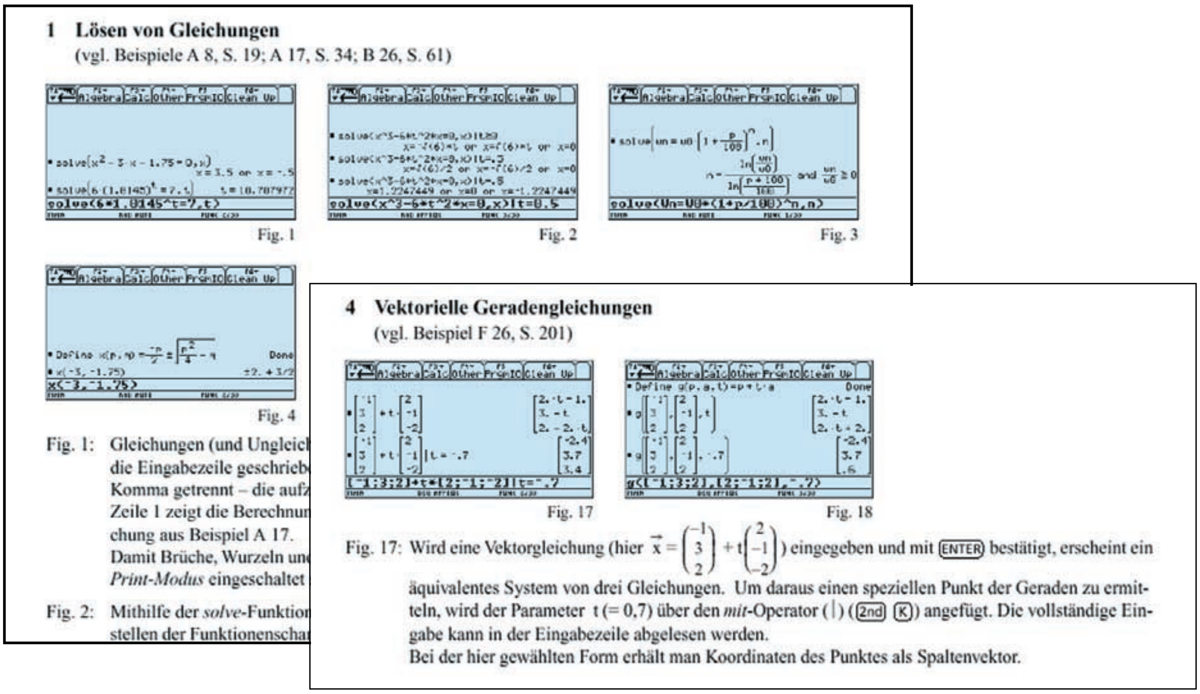
Bearbeitung mit Mathcad

Hinweise zum Einsatz anderer Grafikrechner

Der CD-Teil **„Merkzettel: Wege zum Lösen von Schwerpunktaufgaben“**
bietet auf rd. 110 Blättern in prägnanter, übersichtlicher Form einen extrem verdichteten Extrakt von solchen Lehrbuchpassagen an, in denen die Vorgehensweise beim Lösen bestimmter Standardprobleme erarbeitet wird.
Diese „Merkzettel“ sind also nicht als Zusammenfassung, sondern vielmehr im guten Sinne als „Rezepte“ zu verstehen, die an das im Unterricht (bzw. im Lehrbuch) ausführlich Erarbeitete gleichsam erinnern, ohne noch einmal die „Theorie“ zu rekapitulieren, ohne Beispiele zu nennen, ohne (alle) Voraussetzungen oder Nebenbedingungen auszuführen usw.



Im CD-Teil **„Hinweise für die Anwendung des TI-92“** wird in 28 Beispielkomplexen und unterstützt durch rd. 100 Schirmbildwiedergaben an Schwerpunktproblemen gezeigt, wie mit dem TI-92 gearbeitet werden kann:



1 Lösen von Gleichungen
(vgl. Beispiele A 8, S. 19; A 17, S. 34; B 26, S. 61)

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Fig. 4

Fig. 1: Gleichungen (und Ungleic… die Eingabezeile geschrieb… Komma getrennt – die aufz… Zeile 1 zeigt die Berechnun… chung aus Beispiel A 17. Damit Brüche, Wurzeln un… *Print-Modus* eingeschaltet…

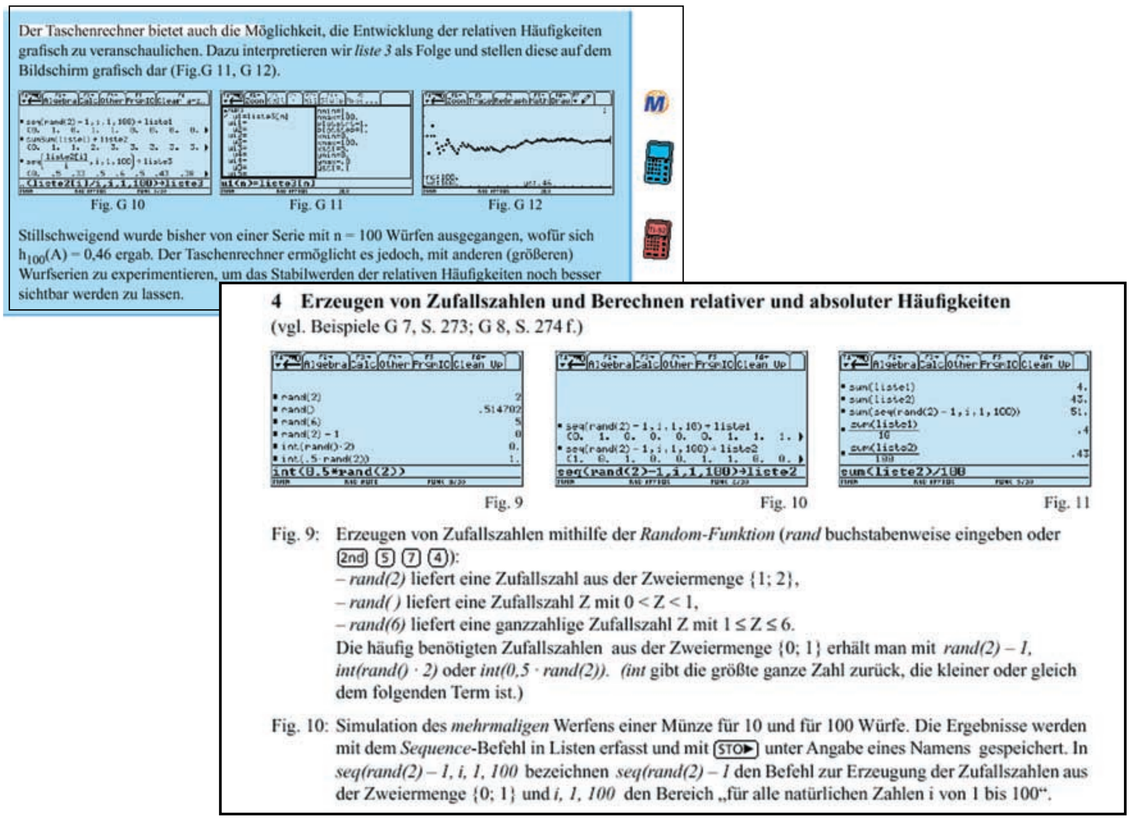
Fig. 2: Mithilfe der *solve*-Funktio… stellen der Funktionenscha…

4 Vektorielle Geradengleichungen
(vgl. Beispiel F 26, S. 201)

Fig. 17 Fig. 18

Fig. 17: Wird eine Vektorgleichung (hier $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$) eingegeben und mit ENTER bestätigt, erscheint ein äquivalentes System von drei Gleichungen. Um daraus einen speziellen Punkt der Geraden zu ermitteln, wird der Parameter t (= 0,7) über den *mit*-Operator (|) (2nd K) angefügt. Die vollständige Eingabe kann in der Eingabezeile abgelesen werden.
Bei der hier gewählten Form erhält man Koordinaten des Punktes als Spaltenvektor.

Der Zugang zu den „Hinweisen“ erfolgt über die „Lesezeichen“ oder durch Anklicken des Rechnersymbols:



Der Taschenrechner bietet auch die Möglichkeit, die Entwicklung der relativen Häufigkeiten grafisch zu veranschaulichen. Dazu interpretieren wir *liste 3* als Folge und stellen diese auf dem Bildschirm grafisch dar (Fig.G 11, G 12).

Fig. G 10 Fig. G 11 Fig. G 12

Stillschweigend wurde bisher von einer Serie mit n = 100 Würfen ausgegangen, wofür sich $h_{100}(A) = 0{,}46$ ergab. Der Taschenrechner ermöglicht es jedoch, mit anderen (größeren) Wurfserien zu experimentieren, um das Stabilwerden der relativen Häufigkeiten noch besser sichtbar werden zu lassen.

4 Erzeugen von Zufallszahlen und Berechnen relativer und absoluter Häufigkeiten
(vgl. Beispiele G 7, S. 273; G 8, S. 274 f.)

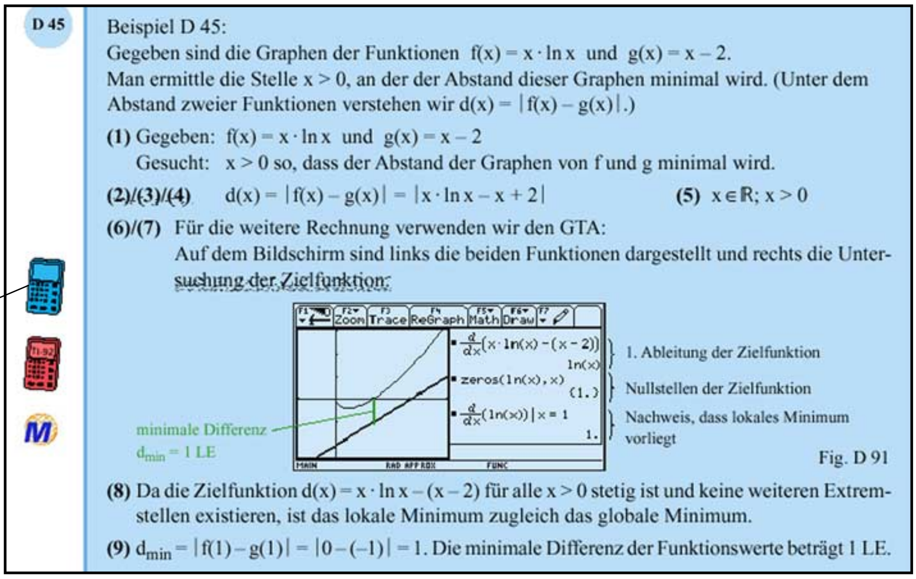
Fig. 9 Fig. 10 Fig. 11

Fig. 9: Erzeugen von Zufallszahlen mithilfe der *Random-Funktion* (*rand* buchstabenweise eingeben oder 2nd 5 7 4):
– *rand(2)* liefert eine Zufallszahl aus der Zweiermenge {1; 2},
– *rand( )* liefert eine Zufallszahl Z mit $0 < Z < 1$,
– *rand(6)* liefert eine ganzzahlige Zufallszahl Z mit $1 \leq Z \leq 6$.
Die häufig benötigten Zufallszahlen aus der Zweiermenge {0; 1} erhält man mit *rand(2) – 1*, *int(rand() · 2)* oder *int(0,5 · rand(2))*. (*int* gibt die größte ganze Zahl zurück, die kleiner oder gleich dem folgenden Term ist.)

Fig. 10: Simulation des *mehrmaligen* Werfens einer Münze für 10 und für 100 Würfe. Die Ergebnisse werden mit dem *Sequence*-Befehl in Listen erfasst und mit STO▶ unter Angabe eines Namens gespeichert. In *seq(rand(2) – 1, i, 1, 100* bezeichnen *seq(rand(2) – 1* den Befehl zur Erzeugung der Zufallszahlen aus der Zweiermenge {0; 1} und *i, 1, 100* den Bereich „für alle natürlichen Zahlen i von 1 bis 100“.

Der CD-Teil **„Lehrbuchbeispiele mit anderen Grafikrechnern“**
enthält Erläuterungen zum Einsatz der Taschenrechner TI-83, Algebra FX 2.0 und CFX-9850G beim Bearbeiten der im Lehrbuch für den TI-92 dargestellten Beispiele:

Das Rechnersymbol führt zum PDF-Dokument der „anderen Grafikrechner“.


D 45

Beispiel D 45:
Gegeben sind die Graphen der Funktionen $f(x) = x \cdot \ln x$ und $g(x) = x - 2$.
Man ermittle die Stelle $x > 0$, an der der Abstand dieser Graphen minimal wird. (Unter dem Abstand zweier Funktionen verstehen wir $d(x) = |f(x) - g(x)|$.)

(1) Gegeben: $f(x) = x \cdot \ln x$ und $g(x) = x - 2$
Gesucht: $x > 0$ so, dass der Abstand der Graphen von f und g minimal wird.

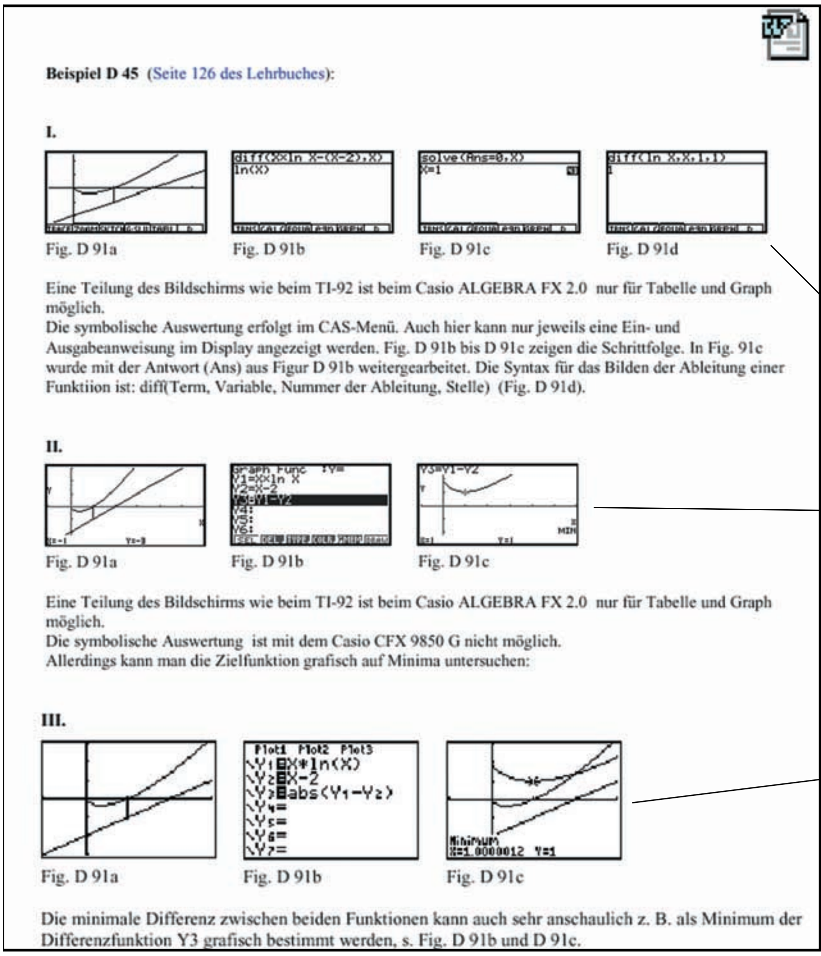
(2)/(3)/(4) $d(x) = |f(x) - g(x)| = |x \cdot \ln x - x + 2|$ **(5)** $x \in \mathbb{R}; x > 0$

(6)/(7) Für die weitere Rechnung verwenden wir den GTA:
Auf dem Bildschirm sind links die beiden Funktionen dargestellt und rechts die Untersuchung der Zielfunktion:

Fig. D 91

(8) Da die Zielfunktion $d(x) = x \cdot \ln x - (x - 2)$ für alle $x > 0$ stetig ist und keine weiteren Extremstellen existieren, ist das lokale Minimum zugleich das globale Minimum.

(9) $d_{min} = |f(1) - g(1)| = |0 - (-1)| = 1$. Die minimale Differenz der Funktionswerte beträgt 1 LE.


Beispiel D 45 (Seite 126 des Lehrbuches):

I.

Fig. D 91a Fig. D 91b Fig. D 91c Fig. D 91d

Eine Teilung des Bildschirms wie beim TI-92 ist beim Casio ALGEBRA FX 2.0 nur für Tabelle und Graph möglich.
Die symbolische Auswertung erfolgt im CAS-Menü. Auch hier kann nur jeweils eine Ein- und Ausgabeanweisung im Display angezeigt werden. Fig. D 91b bis D 91c zeigen die Schrittfolge. In Fig. 91c wurde mit der Antwort (Ans) aus Figur D 91b weitergearbeitet. Die Syntax für das Bilden der Ableitung einer Funktiion ist: diff(Term, Variable, Nummer der Ableitung, Stelle) (Fig. D 91d).

II.

Fig. D 91a Fig. D 91b Fig. D 91c

Eine Teilung des Bildschirms wie beim TI-92 ist beim Casio ALGEBRA FX 2.0 nur für Tabelle und Graph möglich.
Die symbolische Auswertung ist mit dem Casio CFX 9850 G nicht möglich.
Allerdings kann man die Zielfunktion grafisch auf Minima untersuchen:

III.

Fig. D 91a Fig. D 91b Fig. D 91c

Die minimale Differenz zwischen beiden Funktionen kann auch sehr anschaulich z. B. als Minimum der Differenzfunktion Y3 grafisch bestimmt werden, s. Fig. D 91b und D 91c.

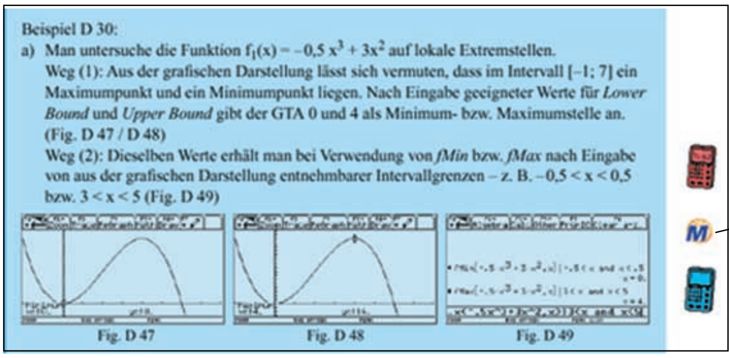
Durch Anklicken des Word-Symbols gelangt man zum Word-Dokument, in dem die erläuternden Texte verändert oder bearbeitet werden können.

Algebra FX 2.0

CFX-9850G

TI-83

Im CD-Teil **„Lehrbuchbeispiele mit Mathcad“**
wird gezeigt, wie die im Lehrbuch mit dem TI-92 gelösten Beispiele mit Mathcad bearbeitet werden können.
Dabei liegt das Besondere darin, dass es sich hierbei nicht nur um gedruckte Beispiele handelt, sondern um aktive Arbeitsblätter, die mithilfe des mitgelieferten Mathcad-Explorers oder einer Vollversion (ab 8.0) auch für neue Aufgaben genutzt werden können. Verbunden damit werden Hinweise zum Einsatz ausgewählter Aufgaben aus dem Stoff der gymnasialen Oberstufe gegeben.

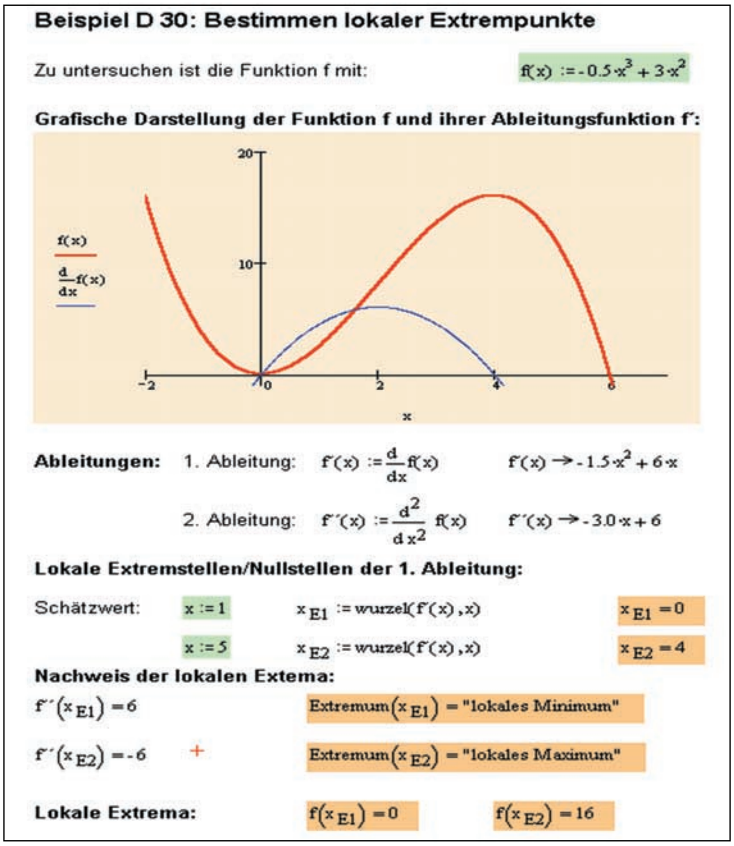


Beispiel D 30:
a) Man untersuche die Funktion $f_1(x) = -0{,}5\,x^3 + 3x^2$ auf lokale Extremstellen.
Weg (1): Aus der grafischen Darstellung lässt sich vermuten, dass im Intervall [–1; 7] ein Maximumpunkt und ein Minimumpunkt liegen. Nach Eingabe geeigneter Werte für *Lower Bound* und *Upper Bound* gibt der GTA 0 und 4 als Minimum- bzw. Maximumstelle an. (Fig. D 47 / D 48)
Weg (2): Dieselben Werte erhält man bei Verwendung von *fMin* bzw. *fMax* nach Eingabe von aus der grafischen Darstellung entnehmbarer Intervallgrenzen – z. B. $-0{,}5 < x < 0{,}5$ bzw. $3 < x < 5$ (Fig. D 49)

Fig. D 47 Fig. D 48 Fig. D 49

Durch Anklicken des Mathcad-Symbols öffnet der Mathcad-Explorer das vorbereitete Arbeitsblatt.

Ein wesentlicher Vorzug der Mathcad-Dokumente besteht in der Verknüpfung eines CAS mit einem Textverarbeitungsprogramm. So lassen sich präsentationsreife Aufgabenblätter gestalten



Beispiel D 30: Bestimmen lokaler Extrempunkte

Zu untersuchen ist die Funktion f mit: $f(x) := -0.5\cdot x^3 + 3\cdot x^2$

Grafische Darstellung der Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f´:

Ableitungen: 1. Ableitung: $f'(x) := \frac{d}{dx}f(x)$ $f'(x) \rightarrow -1.5\cdot x^2 + 6\cdot x$

2. Ableitung: $f''(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x)$ $f''(x) \rightarrow -3.0\cdot x + 6$

Lokale Extremstellen/Nullstellen der 1. Ableitung:

Schätzwert: $x := 1$ $x_{E1} := \text{wurzel}(f'(x), x)$ $x_{E1} = 0$

$x := 5$ $x_{E2} := \text{wurzel}(f'(x), x)$ $x_{E2} = 4$

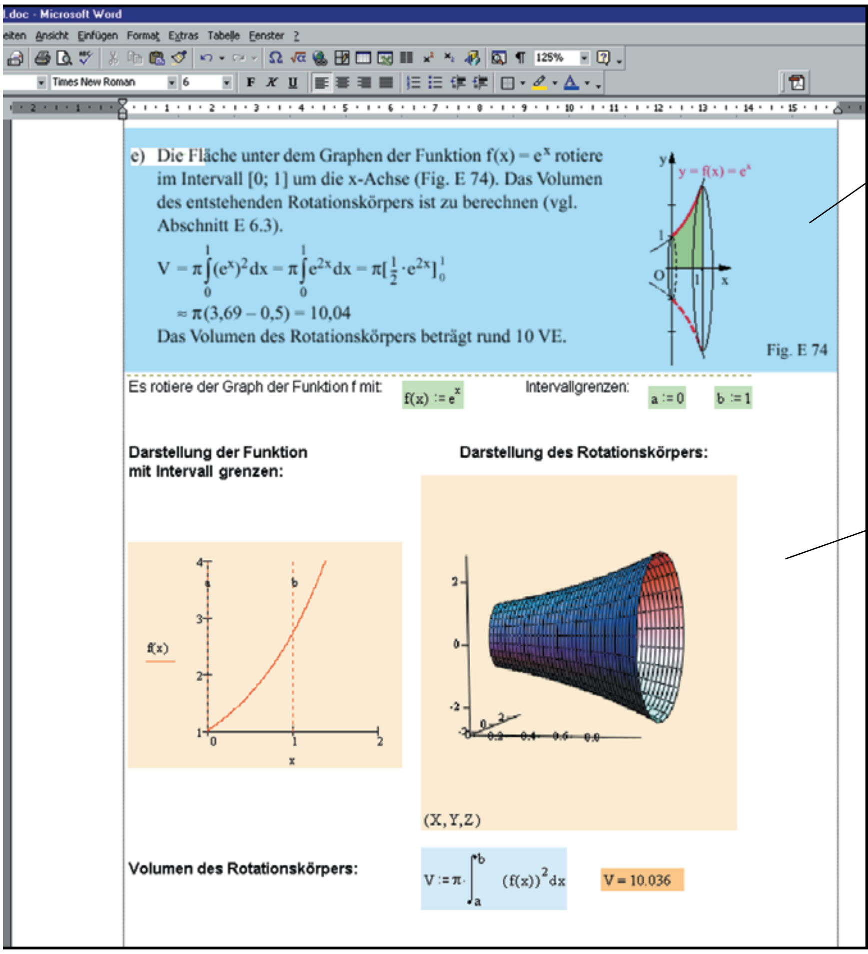
Nachweis der lokalen Extrema:

$f''(x_{E1}) = 6$ $\text{Extremum}(x_{E1}) = \text{"lokales Minimum"}$

$f''(x_{E2}) = -6$ + $\text{Extremum}(x_{E2}) = \text{"lokales Maximum"}$

Lokale Extrema: $f(x_{E1}) = 0$ $f(x_{E2}) = 16$

Die Mathcad-Arbeitsblätter lassen sich gut mit Dokumenten anderer Textverarbeitungsprogramme verknüpfen:



Hier wurde ein Abschnitt des Lehrbuchs von der CD mit dem Acrobat Reader kopiert und in ein Word-Dokument eingefügt.

Ein vorbereitetes Mathcad-Arbeitsblatt zum Lösen der Aufgabe wurde ebenfalls kopiert und in das Word-Dokument eingefügt.
Der dynamische Charakter des Mathcad-Arbeitsblattes bleibt dabei erhalten; durch Doppelklick auf das Arbeitsblatt wird Mathcad im Hintergrund gestartet.

Ist für einen speziellen Aufgabentyp einmal ein Arbeitsblatt angelegt und gespeichert worden, steht es für gleichartige Aufgaben immer wieder zur Verfügung.
Auch zu Demonstrationszwecken sind diese Arbeitsblätter mit ihren dynamischen Fähigkeiten gut einzusetzen.