Vortragsübersicht

1. Ziele und Methoden der Studie
2. Die Mathematiktests von PISA2000
3. Einige Befunde

1. Ziele und Methoden der Studie

1.1 Grundsätzliches

P I S A

Programme for

International

Student

Assessment

Es ging und geht um die Gewinnung vergleichender Daten über die Funktions- und Leistungsfähigkeit der Pflichtschulbildungssysteme von 32 Staaten (28 OECD Staaten und 4 nicht OECD-Mitgliedstaaten).
Daher richtet sich das Augenmerk auf 15-jährige Schülerinnen und Schüler.

Erfasst werden sollen Kompetenzen in den Bereichen

Lesekompetenz
(Reading Literacy),

mathematische Grundbildung
(Mathematical Literacy),

Naturwissenschaftliche Grundbildung
(Scientific Literacy).

Die KMK hatte beschlossen, im Rahmen von PISA 2000 als Ergänzung zum internationalen Mathematiktest einen nationalen Test entwickeln und einer vergrößerten nationalen Schülerstichprobe vorlegen zu lassen.

Der **internationale Mathematiktest** (31 Items) war sehr stark an der Fähigkeit ausgerichtet, mathematisches Wissen funktional, mit Einsicht und flexibel in ***variierenden Anwendungssituationen*** einsetzen zu können. Daher war er nur nachrangig curricular orientiert.

Die deutsche Expertengruppe entwickelte deshalb einen nationalen Mathematiktest mit 86 Items, der eher am deutschen ***Kerncurriculum*** orientiert war und für wichtig gehaltene Einzelfertigkeiten auch in isolierter Form prüfte.

1.2 Testkonstruktion

Bei der Konstruktion des internationalen Tests wurden die Items sogenannten ***Kompetenzklassen*** zugeordnet.

Klasse 1: Zur Lösung werden Kenntnisse von Fakten und einfachen Berechnungen benötigt.
(kurz: **„Reproduction“**)

Klasse 2: Zur Lösung sind auch Querverbindungen zwischen unterschiedlichen mathematischen Inhalten oder zwischen Mathematik und Realität herzustellen.
(kurz: **„Connection“**)

Klasse 3: Zur Lösung ist einsichtsvolles mathematisches Denken und strukturelles Verallgemeinern nötig.
(kurz: **„Reflection“**).

Zur Konstruktion des nationalen Tests wurden zunächst fünf Kompetenzklassen für Items gebildet, die später wieder zu drei Klassen zusammengefasst wurden.

Nat. Klasse 1: Die Bearbeitung erfordert nur direkt einsetzbare technische Fertigkeiten und/oder Faktenwissen. (kurz: **„Technische Aufgaben"**)

Nat. Klasse 2: Die Bearbeitung erfordert das Finden eines mathematischen Ansatzes bzw. Modells und das resultierende algorithmische Lösungsverfahren dominiert. (kurz: **„Rechnerische Modellierungsaufgaben"**)

Nat. Klasse 3: Der Ansatz bzw. das Modell ergeben sich aus überwiegend *begrifflichen* Schritten, die gegenüber den noch nötigen Bearbeitungsschritten dominieren. (kurz: **„Begriffliche Modellierungsaufgaben"**)

1.2.1 Das Raschmodell

Für die Testkonstruktion (und die spätere Auswertung wurde ein Testmodell gewählt, das die Verteilung von Testitems auf mehrere Testhefte erlaubt und die Annahme macht, dass sich das Lösen eines Items durch einen Probanden als Zufallsexperiment des folgenden Typs auffassen lässt:

(1) Jeder Aufgabe i lässt sich ein *Schwierigkeitsparameter* δ_i und jedem Probanden k ein *Fähigkeitsparameter* θ_k so zuordnen, dass für alle Aufgaben i und alle Probanden k gilt:

$$P(k \text{ löst } i) = \frac{1}{1 + \exp(\delta_i - \theta_k)}$$

(*logistische Aufgabencharakteristik*)

(2) Für jeden Probanden k sind seine Aufgabenbearbeitungen als Zufallsexperimente voneinander unabhängig.

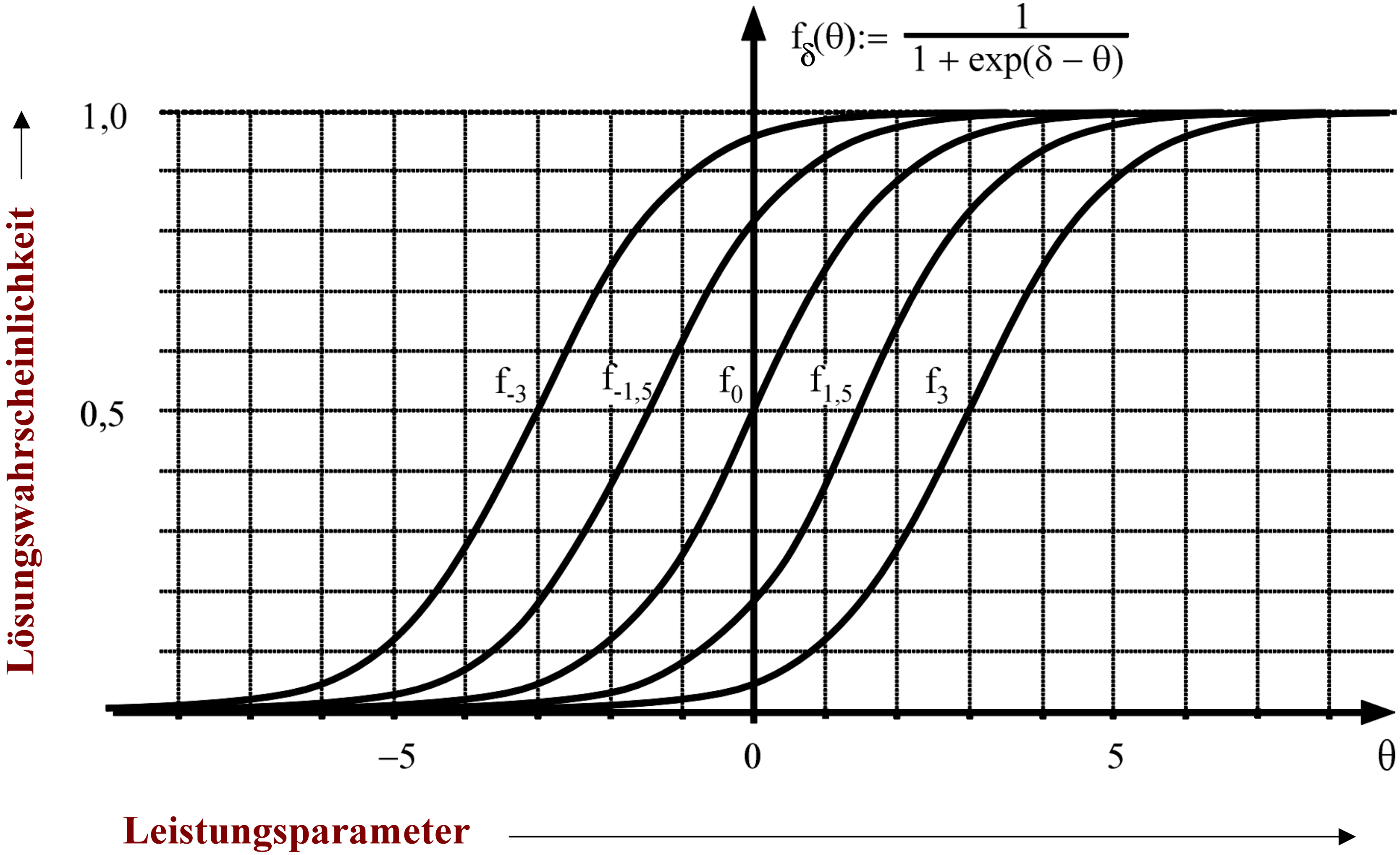
(*lokale stochastische Unabhängigkeit*)

(3) Dies Antwortvektoren aller Probanden sind unabhängige Zufallsgrößen.

(*globale stochastische Unabhängigkeit*)

Wenn diese Modellvorstellung auf die Bearbeitung eines Tests durch eine Probandenpopulation zutrifft, so kann man davon sprechen, dass dieser Test ein *formal eindimensionales* Probandenmerkmal definiert. Dies bedeutet *nicht*, dass alle Aufgaben die gleichen Bearbeitungstechniken verlangen.

Beispiel für die Itemcharakteristiken eines *Raschmodells*:



1.2.2 OECD-PISA-Index und Kompetenzstufen

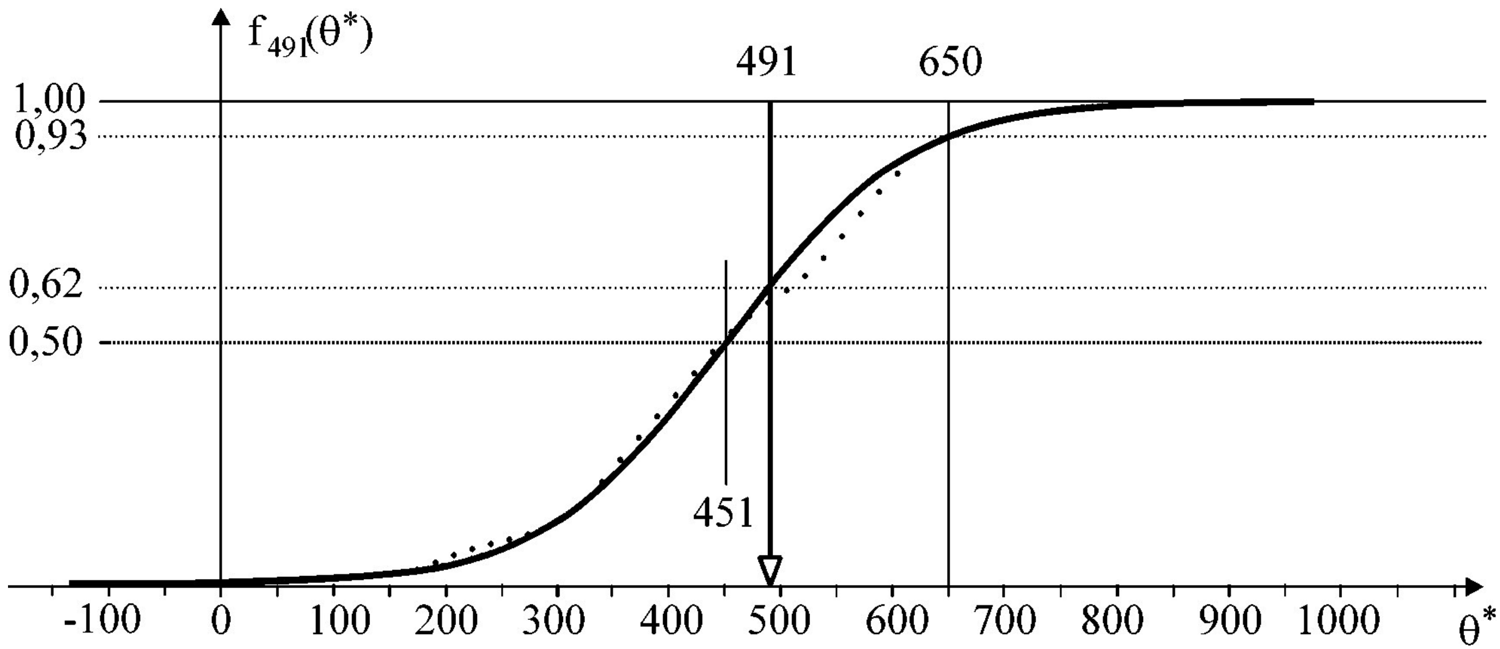
Mit dem Mittelwert μ (normiert auf 0) und der Standardabweichung σ ($\approx$1,31) der geschätzten θ-Werte in der OECD-Gesamtpopulation wurden sowohl die *Fähigkeitswerte* als auch die *Schwierigkeitsparameter* in der Form

$$\tau(\mathbf{x}) := 500 + 100\,\frac{x - \mu}{\sigma}$$

transformiert.

Als ***PISA-Index*** für eine Aufgabe i wurde dann jedoch an Stelle von $\tau(\delta_i)$ der Fähigkeitswert eines Probanden verwendet, der für diese Aufgabe die Lösungswahrscheinlichkeit 62% besitzt. Dies entspricht der Addition einer Konstanten ($\approx$40) auf alle Werte $\tau(\delta_i)$.

Beispiel für die Abhängigkeit der Lösungswahrscheinlichkeit von den transformierten Parametern:



Zugehöriges Item:

Eine Glasfabrik stellt Flaschen her. 2 % der Flaschen sind fehlerhaft; dies sind 160 Flaschen. Wie viele Flaschen wurden insgesamt hergestellt?

 320 Flaschen 3200 Flaschen 800 Flaschen 8000 Flaschen

 12 500 Flaschen

Zur Definition von ***Kompetenzstufen*** wurde eine Zerlegung der Fähigkeitsskala durch fünf Intervalle des Typs $S_{a,b} := [a;b[$ gebildet. Eine Aufgabe wurde genau dann einer Kompetenzstufe **S** zugeordnet, wenn es einen Fähigkeitswert aus **S** gab, bei dem ihre Lösungswahrscheinlichkeit 0,62 betrug.

Die gewählten „Stufen" waren

„unter I":	$]-\infty\,; 328\,[$
I:	$[\,329; 421\,[$
II:	$[\,422; 511\,[$
III:	$[\,512; 603\,[$
IV:	$[\,604; 695\,[$
V:	$[\,696; \infty\,[$

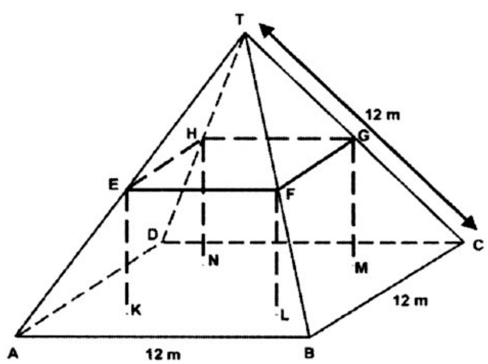
2 Die Mathematiktests von PISA2000

2.1 Beispiele für internationale Items

Bauernhöfe

Hier siehst du ein Foto eines Bauernhauses mit pyramidenförmigem Dach.

Nachfolgend siehst du eine Skizze mit den entsprechenden Maßen, die eine Schülerin vom **Dach** des Bauernhauses gezeichnet hat.



Der Dachboden, in der Skizze ABCD, ist ein Quadrat. Die Balken, die das Dach stützen, sind die Kanten des Quaders (rechtwinkliges Prisma) EFGHKLMN. E ist die Mitte von $\overline{AT}$, F ist die Mitte von $\overline{BT}$, G ist die Mitte von $\overline{CT}$ und H ist die Mitte von $\overline{DT}$. Jede Kante der Pyramide in der Skizze misst 12 m.

1 Berechne den Flächeninhalt des Dachbodens ABCD.

Der Flächeninhalt des Dachbodens ABCD = ______ m^2

2 Berechne die Länge von $\overline{EF}$, einer der waagerechten Kanten des Quaders.

Die Länge von $\overline{EF}$ = ______ m

Aufgabe 1 gehört zu Klasse 1.

Index: 492;
Pr.korr.: 51%

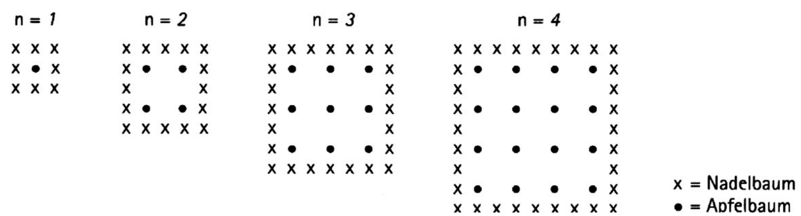
Aufgabe 2 gehört zu Klasse 2.

Index: 524;
Pr.korr.: 41%

Der Aufgabenblock Äpfel:

Ein Bauer pflanzt Apfelbäume an, die er in einem quadratischen Muster anordnet. Um diese Bäume vor dem Wind zu schützen, pflanzt er Nadelbäume um den Obstgarten herum.

Im folgenden Diagramm siehst du das Muster, nach dem Apfelbäume und Nadelbäume für eine beliebige Anzahl (n) von Apfelbaumreihen gepflanzt werden:



1 Vervollständige die Tabelle:

n	Anzahl Apfelbäume	Anzahl Nadelbäume
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

2 Es gibt zwei Formeln, die man verwenden kann, um die Anzahl der Apfelbäume und die Anzahl der Nadelbäume für das oben beschriebene Muster zu berechnen:

Anzahl der Apfelbäume = n^2

Anzahl der Nadelbäume = $8n$

wobei n die Anzahl der Apfelbaumreihen bezeichnet.

Es gibt einen Wert für n, bei dem die Anzahl der Apfelbäume gleich groß ist wie die Anzahl der Nadelbäume. Bestimme diesen Wert und gib an, wie du ihn berechnet hast.

3 Angenommen, der Bauer möchte einen viel größeren Obstgarten mit vielen Reihen von Bäumen anlegen. Was wird schneller zunehmen, wenn der Bauer den Obstgarten vergrößert: die Anzahl der Apfelbäume oder die Anzahl der Nadelbäume? Erkläre, wie du zu deiner Antwort gekommen bist.

Aufgabe 1 gehört zu Klasse 2.

Index: 547

Pr.korr.: 48%

Aufgabe 2 gehört zu Klasse 2.

Index: 655

Pr.korr.: 25%

Aufgabe 3 gehört zu Klasse 3.

Index: 722

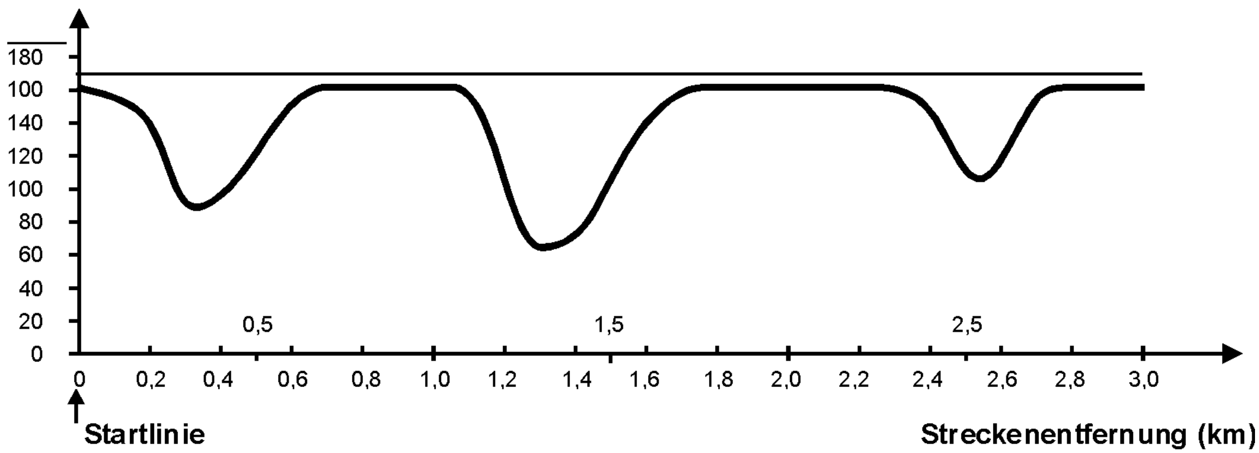
Pr.korr.: 9%

Der Aufgabenblock Rennwagen:

Dieser Graph zeigt, wie die Geschwindigkeit eines Rennwagens während seiner zweiten Runde auf einer drei Kilometer langen ebenen Rennstrecke variiert.

Geschwin
-digkeit
(km/h)

Geschwindigkeit eines Rennwagens
auf einer Strecke von 3 km (2. Runde).



1 Wie groß ist die ungefähre Entfernung von der Startlinie bis zum Beginn des längsten geradlinigen Abschnitts der Rennstrecke?

A 0,5 km B 1,5 km C 2,3 km D 2,6 km

Frage 1 gehört zu Klasse 2.
Pr.korr.: 68%

Der Aufgabenblock Rennwagen (Fragen):

2 Wo wurde während der zweiten Runde die geringste Geschwindigkeit gemessen?

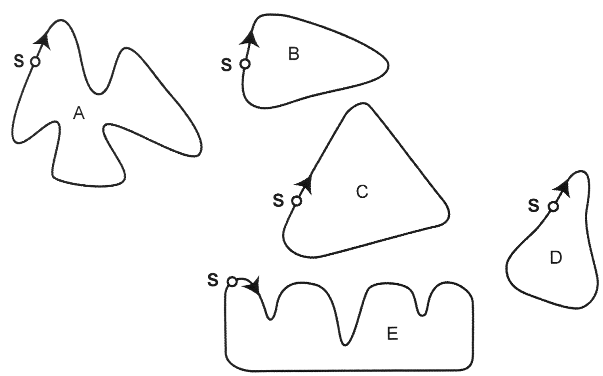
A an der Startlinie
B bei etwa 0,8 km
C bei etwa 1,3 km
D nach der halben Runde

3 Was kannst du über die Geschwindigkeit des Wagens zwischen den Markierungen 2,6 km und 2,8 km sagen?

A Die Geschwindigkeit des Wagens bleibt konstant.
B Die Geschwindigkeit des Wagens nimmt zu.
C Die Geschwindigkeit des Wagens nimmt ab.
D Die Geschwindigkeit des Wagens kann anhand des Graphen nicht bestimmt werden.

4 Hier siehst du Abbildungen von fünf Rennstrecken:

Auf welcher dieser Rennstrecken fuhr der Wagen, so dass der am Anfang gezeigte Geschwindigkeitsgraph entstand?



Frage 2 gehört zu Klasse 1.
Pr.korr.: 81%

Frage 3 gehört zu Klasse 1.
Pr.korr.: 83%

Frage 4 gehört zu Klasse 2.
Pr.korr.: 28%

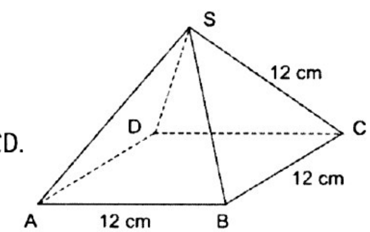
2.2 Beispiele für nationale Items

2.2.1 Items zur Geometrie

Pyramide
Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Quadrat.
Jede Kante der skizzierten Pyramide misst 12 cm.

1 Berechne den Flächeninhalt der Grundfläche ABCD.

2 Bestimme den Flächeninhalt einer der dreieckigen Seitenflächen. Erkläre, wie du deine Antwort gefunden hast.

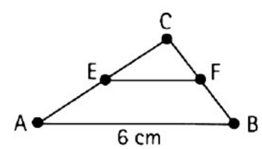


(Bild nicht maßgenau!)

Pyramide 1: NK2.
Thr = 503; (51%)

Pyramide 2: NK2.
Thr = 810; (4%)

Dreieck
Die Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC ist 6 cm lang. Es werden die Mittelpunkte E und F der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ eingezeichnet. Wie lang ist $\overline{EF}$?

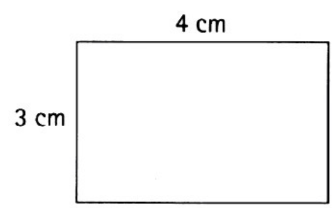


(Bild nicht maßgenau)

Dreieck: NK2.
Thr = 618; (33%)

Rechteck
Ein Rechteck ist 4 cm lang und 3 cm breit.
Wie groß ist sein Flächeninhalt?

- ☐ 12 cm²
- ☐ 7 cm
- ☐ 7 cm²
- ☐ 12 cm
- ☐ 14 cm



(Zeichnung nicht maßgenau)

Rechteck: NK1.
Thr = 383; (85%)

2.2.2 Items zur Prozentrechnung

Items mit „Standardlösungsalgorithmus“:

Glasfabrik, Version 1
Eine Glasfabrik stellt am Tag 8000 Flaschen her. 2 % der Flaschen haben Fehler. Wie viele sind das?

☐ 16 Flaschen ☐ 80 Flaschen ☐ 400 Flaschen
☐ 40 Flaschen ☐ 160 Flaschen

Version 1: NK2.
Thr = 471; (68%)

Glasfabrik, Version 2
Eine Glasfabrik stellt am Tag 8000 Flaschen her. Erfahrungsgemäß sind ca. 160 Flaschen fehlerhaft. Wie viel Prozent sind das?

☐ 0,02 % ☐ 1,28 % ☐ 5 %
☐ 0,5 % ☐ 2 %

Version 2: NK2.
Thr = 556; (47%)

Glasfabrik, Version 3
Eine Glasfabrik stellt Flaschen her. 2 % der Flaschen sind fehlerhaft; dies sind 160 Flaschen. Wie viele Flaschen wurden insgesamt hergestellt?

☐ 320 Flaschen ☐ 3200 Flaschen ☐ 12500 Flaschen
☐ 800 Flaschen ☐ 8000 Flaschen

Version 3: NK2.
Thr = 491; (66%)

Items mit „mehrschrittiger“ Bearbeitung:

Miete
In einer Großstadt kostete 1985 eine 70 m^2-Wohnung 1 000 DM Miete pro Monat. Seit 1985 stieg der Mietpreis alle 5 Jahr um 20 %.

Welche Monatsmiete musste dann 1995 für diese Wohnung gezahlt werden?
Schreibe auf, wie du rechnest.

Miete: NK2.
Thr = 648; (18%)

Sparen
Karina hat 1 000 DM in ihrem Ferienjob verdient. Ihre Mutter empfiehlt ihr, das Geld zunächst bei einer Bank für 2 Jahre festzulegen (Zinseszins!). Dafür hat sie zwei Angebote:

a) „Plus"-Sparen: Im ersten Jahr 3 % Zinsen, im zweiten Jahr dann 5 % Zinsen.
b) „Extra"-Sparen: Im ersten und zweiten Jahr jeweils 4 % Zinsen.

Karina meint: „Beide Angebote sind gleich gut." Was meinst du dazu?
Begründe deine Antwort!

Sparen: NK2.
Thr = 700; (16%)

Das Item Fahrradunfälle (Vortext):

Eine Zeitung meldet:

> ***70 % aller mit dem Fahrrad verunglückten Kinder sind Jungen. Jungen auf dem Rad sind also stärker gefährdet als Mädchen.***

Die Zeitungsmeldung beruht auf folgender Tabelle, in der die 10 000 Schülerinnen und Schüler einer Region, die mit dem Fahrrad zur Schule fahren, nach Geschlecht und Unfallbeteiligung aufgeführt sind.

	Verunglückt	Nicht verunglückt	Insgesamt Jungen/Mädchen
Jungen	70	8 400	8 470
Mädchen	30	1 500	1 530
Kinder insgesamt	100	9 900	10 000

Beurteile die Zeitungsmeldung mittels der Tabelle:

Das Item Fahrradunfälle (Frageteil):

(1) Die Zeitungsmeldung, dass 70 % aller mit dem Fahrrad verunglückten Kinder Jungen sind, ist

richtig, falsch , nicht anhand der Tabelle zu beantworten.

(2) Begründe: Die Zeitungsmeldung, dass Jungen stärker gefährdet als Mädchen sind, ist

richtig, weil ... falsch , weil ...

Teil 1: NK3.

Thr = 497; (62%)

Teil 2: NK2.

Thr = 674; (19%)

2.3 Abschließende Beispiele für nationale Items

Brötchen

7 Brötchen kosten 3,15 DM. Was kosten 11 Brötchen?

☐ 5,05 DM ☐ 4,95 DM ☐ 4,85 DM ☐ 4,75 DM ☐ 4,65 DM

NK2.

Thr = 362; (87%)

Rechnung

Rechne und kreuze die richtige Lösung an! $4 + 3 \cdot (2 + 1) =$

☐ 11 ☐ 13 ☐ 14 ☐ 15 ☐ 21

NK1.

Thr = 583; (40%)

Multiplikation

Multipliziere aus und kreuze die richtige Antwort an! $(2x - 3y)^2 =$

☐ $4x^2 - 9y^2$

☐ $4x^2 + 6xy + 9y^2$

☐ $4x^2 - 6xy + 9y^2$

☐ $4x^2 - 12xy + 9y^2$

☐ $4x^2 - 12xy - 9y^2$

NK1.

Thr = 612; (32%)

(Gy: 66%)

Items zum Gleichungs- und Funktionsbegriff:

Quadratische Gleichung

Löse die Gleichung $4x + 4 = 3x^2$.

NK1.
Thr = 797; (6%)
(Gy: 17%)

Gleichung

Für zwei Zahlen x ($x > 0$) und y gilt die Gleichung $x \cdot y = 1$.
Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ☐ Wenn der Wert von x größer als 1 ist, so ist der Wert von y negativ.
- ☐ Wenn der Wert von x größer als 1 ist, so ist der Wert von y größer 1.
- ☐ Wenn der Wert von x kleiner als 1 ist, so ist der Wert von y kleiner als 1.
- ☐ Wenn der Wert von x zunimmt, so nimmt auch der Wert von y zu.
- ☐ Wenn der Wert von x zunimmt, so nimmt auch der Wert von y ab.

NK2.
Thr = 640; (25%)

Funktionswert (Teil 3 einer Aufgabe)

Die Funktion mit der Gleichung $y = 2x - 1$ soll untersucht werden.

(3) Berechne für $x = 100$ den y-Wert.

NK1.
Thr = 583; (40%)

Eine Partitionsaufgabe:

31 Pfennig

Wie kannst du einen Geldbetrag von genau 31 Pfennigen hinlegen, wenn du nur

10-Pfennig-, 5-Pfennig- und 2-Pfennig-Münzen

zur Verfügung hast? Gib **alle** Möglichkeiten an.

NK3.

Thr = 797; (3%)

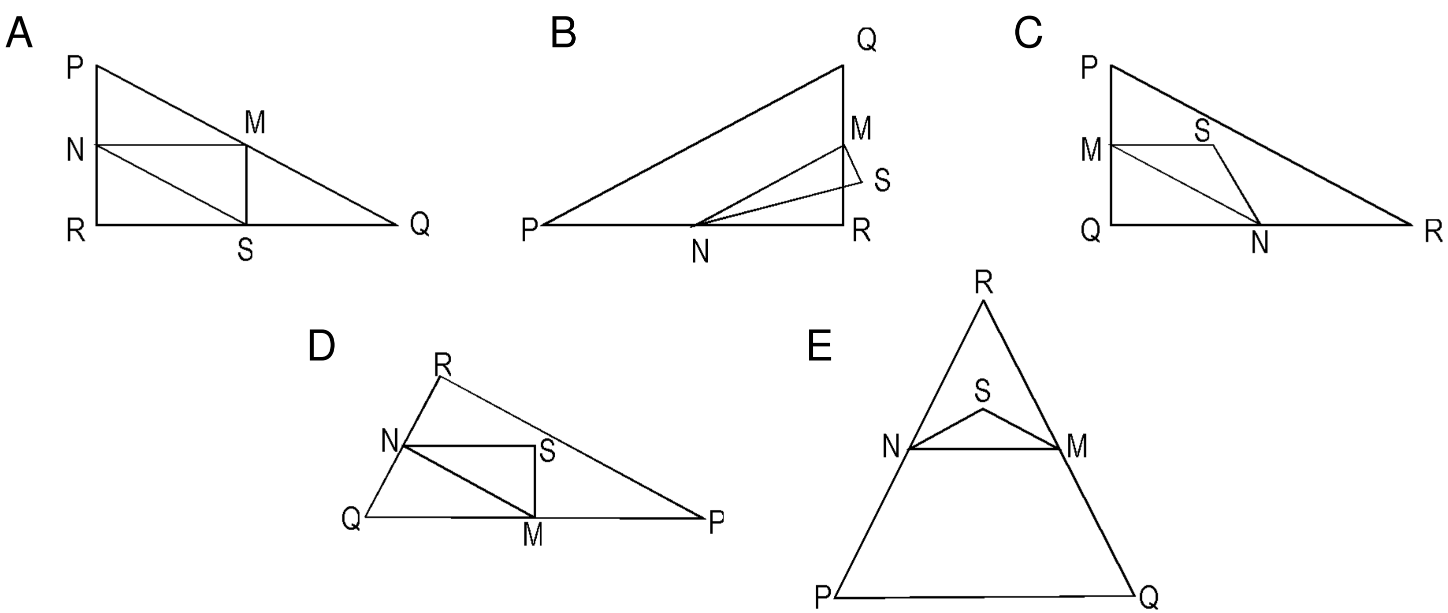
(4-5 Mögl.: 17%)

Ein „Kuriosum“ (höhere Lösungsquote in der deutschen Population als in der OECD-Gesamtstichprobe):

Dreiecke

Kreise die Figur ein, die zur folgenden Beschreibung passt.

Das Dreieck PQR hat einen rechten Winkel in R. Die Strecke $\overline{RQ}$ ist kürzer als die Strecke $\overline{PR}$. M ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ und N ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{QR}$. S ist ein Punkt im Inneren des Dreiecks. Die Strecke $\overline{MN}$ ist länger als die Strecke $\overline{MS}$.



Pr.korr.: int. 59%, nat. 65%

3 Einige Befunde

3.1 Nationale Verteilung auf die Kompetenzstufen:

Kompetenz-stufe	HS	IGS	RS	Gy	alle
V (ab 696)	0,0%	0,1%	0,2%	3,5%	1,2%
IV (ab 604)	0,4%	2,3%	5,0%	30,7%	11,7%
III (ab 512)	8,0%	21,0%	36,9%	52,1%	33,2%
II (ab 422)	41,6%	47,0%	47,4%	13,1%	35,3%
I (ab 329)	42,0%	27,2%	10,2%	0,6%	16,5%
< I (bis 328)	8,0%	2,4%	0,3%	0,0%	2,2%

Verteilung der Subpopulation aller 15-jährigen Schüler in den Bildungsgängen HS, IGS, RS und Gym auf die Kompetenzstufen,

3.2 Computernutzung und Mathematikleistung

In den Begleitfragebögen wurden diverse Indikatoren zur Nutzung von Computern in der Schule und im heimischen Umfeld erhoben.

Die Beantwortung erfolgte meistens in 5 Kategorien des Typs

„von 1 (nie, kein, ...) bis 5 (sehr oft, sehr viel, ...)“

Bei einer Analyse der Daten durch Berechnung von *Korrelationskoeffizienten* und *gruppierte Boxplots* zeigen sich zwar erwartungsgemäß nur schwache Zusammenhänge, aber durchaus interessante Trends:

Die ***Computernutzer-Selbsteinschätzung***, das ***Computerinteresse***, die ***Computererfahrung mit Lern- und Arbeitssoftware***, die ***Computererfahrung mit Spielen***, sogar die ***Häufigkeit des Computerzugangs*** und der ***Computernutzung in der Schule*** korrelierten nur äußerst schwach mit der Mathematikleistung.

Etwas höhere positive Korrelationen um 0,25 zeigten sich nur bei den Variablen ***Häufigkeit des Computerzugangs*** und der ***Computernutzung zu Hause.*** Auch die Variable Erfahrung mit e-Mail und Internet korrelierte immerhin noch mit 0,15 mit der Mathematikleistung.

Es stimmt nachdenklich, dass eine Verbindung von Computeraktivitäten mit der Lokation **Schule** sich im Gegensatz zu häuslichen Aktivitäten kaum auf die Mathematikleistung auswirkt.