Wolfram Koepf/Adi Ben-Israel

Integration mit Derive

Arthur Engel hat in [1] die Fähigkeit des PC-Programms Derive [2] für Mathematiklehrer vorgestellt. Die Frage nach der Einbindung eines solchen Werkzeugs in den schulischen Mathematikunterricht wurde in [3] weitergedacht.

Wir wollen in dieser Arbeit anhand eines Beispiels zeigen, wie man Derive als didaktisches Hilfsmittel einsetzen kann. Uns geht es hierbei nicht um den Einsatz von Derive in der Mittelstufe, sondern in einem Leistungskurs der Oberstufe. Wir behandeln das Integrationsproblem der Bestimmung von Flächeninhalten. Hierbei wollen wir allerdings weder den üblichen Weg der Antidifferentation gehen (dabei umgeht man ja gerade das Flächenproblem!), noch Derives Integrationsfähigkeiten benutzen (dabei lernt man natürlich nichts!), dies sollte u. E. erst am Ende stehen. Vielmehr benutzen wir Derives algebraische Fähigkeiten, um Flächeninhalte mit Hilfe ihrer geometrischen Definition zu berechnen.

1. Einführung

Bei einer herkömmlichen Einführung der Integration durch geeignete Riemann-Summen ist man für höhere Funktionen sehr schnell am Ende mit seinem Latein. Während es grundsätzlich gar nicht so schwierig ist, mit variablen unteren und oberen Grenzen zu arbeiten – wenn es auch den Schreibaufwand erheblich erhöht – so ist es vor allem das Auffinden möglichst einfacher Formeln für die auftretenden Summen, die Schwierigkeiten bereiten. So wird man es aus diesen Gründen i. a. bei der Berechnung des Grenzwerts von Riemann-Summen für einige Potenzen x^m ($m \in \mathbb{N}$) belassen (wobei schon dies nicht ganz einfach ist), und danach sehr schnell zur Antidifferentiation übergehen. Dann ist naturgemäß alles viel leichter. Diese Vorgehensweise hat allerdings den Nachteil, daß die wichtigen Konzepte für die Flächenberechnung, die immerhin schon über 2 Jahrtausende alt sind, während die Differentiation eine recht junge Geschichte hat, zu kurz kommen. Auch kann die Bedeutung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf diese Weise gar nicht richtig gewürdigt werden, da man Integration praktisch von vornherein mit Antidifferentiation gleichsetzt.

Wir wollen in den folgenden Abschnitten zeigen, wie man unter Zuhilfenahme eines Computeralgebraprogramms wie Derive bei der Einführung der Integration die Betonung mehr auf die zugrundeliegenden Konzepte setzen kann. Wir verwenden dazu arithmetische und geometrische Intervall-Zerlegungen.

Ferner benutzen wir die numerischen Fähigkeiten von Derive, um eine numerische Integration mit Hilfe der Simpson-Formel durchzuführen. Zwar wird die Simpson-Formel von manchem Lehrer in der Schule behandelt, aber ohne eine Rechenhilfe wie Derive werden in konkreten Fällen die sich ergebenden Berechnungen so umfangreich, daß nur einfachste Beispiele behandelt werden können.

Schließlich zeigen wir, wie man Derive sogar dazu verwenden kann zu zeigen, daß die Simpson-Formel – obwohl man sie durch Approximation des Graphen durch quadratische Polynome erhält – auch für beliebige Polynome dritten Grades noch exakt ist.

2. Regelmäßige arithmetische Zerlegungen

Gesucht ist der Flächeninhalt A des ebenen Bereichs, der durch

den Graph einer positiven Funktion f (oben),
die x-Achse (unten), und (1)
die zwei vertikalen Geraden $x = a$ und $x = b$ (links und rechts)

berandet ist. Dazu zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ in n Teilintervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \ldots, n)$ mit Hilfe der Punkte $x_k \in [a, b]$ $(k = 0, \ldots, n)$, für die

$$a =: x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n := b \tag{2}$$

gilt. Insbesondere ist für jede Zerlegung von $[a, b]$

$$b - a = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k, \tag{3}$$

wobei wir mit Δx_k die Länge des k-ten Teilintervalls bezeichnen. Sind alle Längen Δx_k gleich, nennen wir $\mathcal{P}$ *regelmäßige arithmetische Zerlegung*. Die gemeinsame Länge ergibt sich gemäß (3) zu

$$\Delta x := \frac{b - a}{n} \tag{4}$$

und für die Stützpunkte der Zerlegung gilt dann

$$x_k = x_0 + k\Delta x = a + k\frac{b - a}{n} \quad (k = 0, \ldots, n). \tag{5}$$

Wir nennen nun f *integrierbar* von a nach b, wenn die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \tag{6}$$

für alle Zerlegungsfolgen des Intervalls und alle möglichen Wahlen der Punkte $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ existieren und übereinstimmen.[1] Ist f integrierbar über $[a, b]$, dann heißt der Grenzwert (6) das *(bestimmte) Integral* von f von a nach b, und wir schreiben

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \tag{7}$$

und fassen diesen Wert als den gesuchten Flächeninhalt A auf. Eine Summe der Form

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \tag{8}$$

1 Wer will, kann auf die Werte ξ_k auch verzichten. Wir werden lediglich die Randpunkte $\xi_k = x_{k-1}$ bzw. $\xi_k = x_k$ verwenden.

heißt *Riemann-Summe* von f, und sie stellt den Flächeninhalt eines aus Rechtecken bestehenden Näherungsbereichs dar.

Aufgrund der geometrischen Deutung sieht man nun, daß für monoton wachsende oder fallende Funktionen – und alle elementaren Funktionen haben diese Eigenschaft in geeigneten Intervallen – die Werte $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ für alle Zerlegungen als Intervallendpunkte gewählt werden können, und so untere und obere Schranken für das zu berechnende Integral liefern.

Wählt man nun eine arithmetische Unterteilung, bekommen wir also die linke Riemann-Summe

$$\mathrm{LINKS}(f, [a, b], n) := \sum_{k=1}^{n} f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} \tag{9}$$

bzw. die rechte Riemann-Summe

$$\mathrm{RECHTS}(f, [a, b], n) := \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}, \tag{10}$$

welche für eine in [a, b] monoton wachsende Funktion f immer unterhalb bzw. oberhalb des Integralwerts $\int_a^b f(x)\,dx$ liegen. Stimmen ihre Grenzwerte für $n \to \infty$ also überein (was bei monotonen Funktionen sogar immer der Fall ist), so bestimmen diese den Integralwert.

Die Riemann-Summen (9) und (10) lassen sich nun ohne Mühe als Derive Funktionen deklarieren.

LINKS(f, x, a, b, n) := (b – a) * SUM(LIM(f, x, a + (k – 1) * (b – a)/n), k, 1, n)/n

RECHTS(f, x, a, b, n) := (b – a) * SUM(LIM(f, x, a + k * (b – a)/n), k, 1, n)/n

Um in Derive den Wert $f\left(a + (k-1)\frac{b-a}{n}\right)$ eines Ausdrucks f der Variablen x zu berechnen, müssen wir die Auswertung von f an der Stelle $a + (k-1)\frac{b-a}{n}$ durch den entsprechenden Grenzwert LIM(f, x, a + (k – 1) * (b – a)/n) ersetzen.

An dieser Stelle ist es nun dem Lehrer überlassen, ob er (vielleicht auch nur zunächst) mit dem Black-Box-Prinzip arbeitet oder nicht: beides ist möglich. Er kann diese Funktionen erstellen und die Schüler können sie dann mit $\boxed{\text{Transfer Load Utility}}$ von einer Datei laden, ohne die konkrete Definition zu Gesicht zu bekommen. In diesem Fall wird der Lehrer zu erklären haben, was die beiden Prozeduren LINKS(f, x, a, b, n) und RECHTS(f, x, a, b, n) bei gegebener Funktion f der Variablen x im Intervall [a, b] zu $n \in \mathbb{N}$ berechnen. Die Funktionen können aber auch mit $\boxed{\text{Transfer Merge}}$ sichtbar geladen und ihre Definitionen können besprochen werden.

Die gegebenen Prozeduren können mit Erfolg z. B. auf folgende Beispielfunktionen f angewendet werden, wobei die Variable immer x, die Integration immer von a nach b, und die Anzahl der Teilintervalle immer n ist.[1]

f(x)	Derive Eingabe	Derive Ausgabe
x^3	LINKS (x^3, x, a, b, n)	$\dfrac{(a(n+1)+b(n-1))(b-a)(a^2(n+1)+b^2(n-1))}{4n^2}$
e^x	LINKS (EXP (x), x, a, b, n)	$\dfrac{e^{a/n}(b-a)(e^a-e^b)}{n(e^{a/n}-e^{b/n})}$

sin x LINKS (SIN (x), x, a, b, n)

$$\frac{(a-b)\cos\left(a\left(\frac{1}{2n}+1\right)-\frac{b}{2n}\right)}{2n\sin\left(\frac{a}{2n}-\frac{b}{2n}\right)}+\frac{(b-a)\cos\left(\frac{a}{2n}+\frac{b(2n-1)}{2n}\right)}{2n\sin\left(\frac{a}{2n}-\frac{b}{2n}\right)}$$

cos x LINKS (COS (x), x, a, b, n)

$$\frac{(b-a)\sin\left(a\left(\frac{1}{2n}+1\right)-\frac{b}{2n}\right)}{2n\sin\left(\frac{a}{2n}-\frac{b}{2n}\right)}+\frac{(a-b)\sin\left(\frac{a}{2n}+\frac{b(2n-1)}{2n}\right)}{2n\sin\left(\frac{a}{2n}-\frac{b}{2n}\right)}$$

Die Prozedur RECHTS liefert ähnliche Resultate. Man kann nun auf all diese Ausdrücke die eingebaute Grenzwertfunktion anwenden und erhält dann für $n \to \infty$[2]

f(x)	Derive Eingabe	Derive Ausgabe
x^3	LIM (LINKS (x^3, x, a, b, n), n, inf)	$\frac{b^4}{4}-\frac{a^4}{4}$
e^x	LIM (LINKS (EXP (x), x, a, b, n), n, inf)	e^b-e^a
sin x	LIM (LINKS (SIN (x), x, a, b, n), n, inf)	$\cos a-\cos b$
cos x	LIM (LINKS (COS (x), x, a, b, n), n, inf)	$\sin b-\sin a$

und die gleichen Resultate ganz entsprechend für die Prozedur RECHTS. Man könnte also auch ein vollständiges Black-Box-System anwenden, indem man gleich diese Grenzwertbeziehungen benutzt und sich die Zwischenergebnisse gar nicht erst ansieht. Andererseits kann man diesen Zwischenergebnissen natürlich allerhand Informationen entnehmen. Auf Grund der vielen Variablen sehen die Ausdrücke zwar beeindruckend kompliziert aus, aber es ist dennoch möglich, folgende Feststellungen zu treffen:

1 Ein Derive-Detail: Beim ersten Ausdruck dieser Liste wurde statt $\boxed{\text{Simplify}}$ das $\boxed{\text{Factor}}$ Kommando verwendet.

2 Hier braucht man beim ersten Ausdruck das $\boxed{\text{Expand}}$ Kommando.

– die Tatsache, daß a und b variabel sind, wirkt sich nicht wesentlich auf den Schwierigkeitsgrad der Berechnung aus. Man sieht nämlich, daß es bei der Integration von

$$\left.\begin{matrix} e^x \\ \sin x, \cos x \end{matrix}\right\} \text{ auf die Bestimmung eines Grenzwertes der Form } \left\{\begin{matrix} \lim\limits_{n\to\infty} n(1 - e^{c/n}) = -c \\ \lim\limits_{n\to\infty} n \sin \frac{c}{n} = c \end{matrix}\right.$$

ankommt, und zwar für alle Werte a und b.

– Andererseits besteht der schwierige Teil der Berechnung darin, für die auftretende Summe von $k = 1$ bis n eine Formel zu finden. Daran scheitert i. a. die Berechnung. Bei dem Beispiel der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ findet Derive zwar keine (summenfreie) Formel für die auftretende Summe, aber erstaunlicherweise trotzdem den entsprechenden Grenzwert:

f(x)	Derive Eingabe	Derive Ausgabe
1/x	LINKS (1/x, x, a, b, n)	$(a-b) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(a-b) - a(n+1) + b}$
	LIM (LINKS (1/x, x, a, b, n), n, inf)	$\ln b - \ln a$

– Man kann auch weitergehen, und den auftretenden Summen auf die Spur zu kommen versuchen. Während die Beispiele der Sinus- und Kosinusfunktion wohl zu hoch liegen werden, da es darauf ankommt, eine Summe der Form

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kc) \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^{n} \cos(kc)$$

zu lösen, stellt man fest, daß bei der Exponentialfunktion die n-te Partialsumme einer geometrischen Reihe vorliegt:

$$\sum_{k=1}^{n} e^{kc} = e^c \frac{1 - e^{(n+1)c}}{1 - e^c}.$$

Man sollte sich nicht scheuen, ja, es drängt sich nun geradezu auf, auch andere Beispiele zu untersuchen: Man wird feststellen, daß sich sehr viele Funktionen auf diese Art *nicht* behandeln lassen, da die auftretenden Summen und Grenzwerte selbst für Derive zu schwierig sind.

3. Regelmäßige geometrische Zerlegungen

Will man nun nicht gleich Derives eingebaute Integrationsprozedur INT (f, x, a, b) verwenden – was aus didaktischen Gründen sicher nicht vorteilhaft wäre – und will man auch noch nicht direkt zur Antidifferentiation übergehen, dann muß man sich jetzt etwas Neues einfallen lassen, um noch weitere Funktionen behandeln zu können. Einfluß haben wir auf die Wahl der Punkte ξ_k, und wählt man z. B. den jeweiligen Mittelpunkt

$$\xi_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{2},$$

so kann man die Formel für die entsprechende Riemann-Summe MITTEL (f, x, a, b, n) ebenfalls sofort hinschreiben. Es ergeben sich aber ganz analoge Resultate wie bei LINKS und RECHTS, und somit lassen sich keine neuen Funktionen behandeln.[1]

Einfluß haben wir aber auch auf die Wahl der Zerlegung. Um eine möglichst einfache Formel zu bekommen, sollte die Zerlegung allerdings so regelmäßig wie möglich sein. Bei den bisherigen arithmetisch regelmäßigen Zerlegungen waren immer die Abstände, d.h. die Differenzen aufeinanderfolgender Punkte x_{k-1} und x_k gleich. Was geschieht, wenn wir nun statt dessen die Quotienten aufeinanderfolgender Punkte x_{k-1} und x_k als gleich voraussetzen? Wir nennen dies eine *regelmäßige geometrische Zerlegung*. Hierbei müssen wir voraussetzen, daß die Intervallendpunkte a und b gleiches Vorzeichen haben, z.B. beide positiv sind. Dann ergibt sich aus

$$\frac{x_k}{x_{k-1}} = c,$$

daß

$$\frac{b}{a} = \frac{x_n}{x_0} = \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdots \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_0} = c^n,$$

also $c = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}$, und folglich

$$x_k = \frac{x_k}{x_{k-1}} \cdot \frac{x_{k-1}}{x_{k-2}} \cdots \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_0} \cdot a = c^k a = \left(\frac{b}{a}\right)^{k/n} a.$$

Die entsprechenden linken und rechten Riemann-Summen sind also gegeben durch

$$\text{LINKS\_GEOM}(f, [a, b], n) :=$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{n}} a\right)\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{n}}\right) a$$

bzw.

$$\text{RECHTS\_GEOM}(f, [a, b], n) :=$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}} a\right)\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{n}}\right) a,$$

und die entsprechenden Derive Funktionen

1 Allerdings wird der Fehlerterm i.a. kleiner.

```
LINKS_GEOM (f, x, a, b, n) :=
SUM (LIM (f, x, a (b/a)^((k - 1)/n)) (a (b/a)^(k/n) - a (b/a)^((k - 1)/n)), k, 1, n)

RECHTS_GEOM (f, x, a, b, n) :=
SUM (LIM (f, x, a (b/a)^(k/n)) (a (b/a)^(k/n) - a (b/a)^((k - 1)/n)), k, 1, n)
```

sind schnell aufgeschrieben. Mit ihnen können wir nun z. B. die folgenden Beispiele behandeln[1]

f(x)	Derive Eingabe	Derive Ausgabe
x^m	LINKS_GEOM (x^m, x, a, b, n)	$\frac{a^{m/n}(b^{1/n}-a^{1/n})(a^{m+1}-b^{m+1})}{a^{m/n+1/n}-b^{m/n+1/n}}$
$1/x$	LINKS_GEOM (1/x, x, a, b, n)	$n\frac{b^{1/n}}{a^{1/n}}-n$
$\ln x$	LINKS_GEOM (LN (x), x, a, b, n)	

$$\frac{na^{1/n}(a\ln a-b\ln b)+b^{1/n}((a+b(n-1))\ln b-(a(n+1)-b)\ln a)}{n(b^{1/n}-a^{1/n})}$$

wenn wir vorher die Zahlen a und b mit $\boxed{\text{Declare Variable Domain}}$ als Positive deklarieren. Das heißt, diese Methode liefert z. B. durch Grenzübergang $n \to \infty$ ohne Mühe die Integrale der allgemeinen Potenzfunktion x^m $(m \in \mathbb{R})$ für einen *beliebigen* Exponenten:

f(x)	Derive Eingabe	Derive Ausgabe
x^m	LIM (LINKS_GEOM (x^m, x, a, b, n), n, inf)	$\frac{bb^m-aa^m}{m+1}$
$1/x$	LIM (LINKS_GEOM (1/x, x, a, b, n), n, inf)	$-\ln\frac{a}{b}$
$\ln x$	LIM (LINKS_GEOM (LN (x), x, a, b, n), n, inf)	$-a\ln a+b\ln b+a-b$

Wieder lassen sich die berechneten Summen und Grenzwerte genauer analysieren, und der wichtige Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{c}-1)=\ln c$$

taucht in diesem Zusammenhang auf.

Auch im Fall der geometrischen Zerlegungen ist Derive bei einzelnen Funktionen in der Lage, den Grenzwert zu bestimmen, obwohl keine geschlossene Formel für die Summe gefunden wird:

1 Der erste Ausdruck wurde wieder faktorisiert.

f(x)	Derive Eingabe	Derive Ausgabe
tan x	LIM(LINKS_GEOM(TAN(x), x, a, b, n), n, inf)	ln(cos a) − ln(cos b)

Nachdem man nun so viele Integrationsbeispiele behandelt hat, deren Ergebnisse alle die Form F(b) − F(a) hatten, wird man nun auch keine Mühe haben, das Konzept der Stammfunktion zu diskutieren. Selbst schwächere Schüler werden dieses Muster nun inzwischen erkannt haben.

4. Numerische Integration

Es verbleiben viele Funktionen, die wir nicht direkt integrieren können. Aber auch durch Antidifferentiation lassen sich bekanntlich nicht alle Integrale lösen. Eine große Anwendungsrelevanz hat also die numerische Integration. Meist behandelt man in diesem Zusammenhang die Trapez-Formel und die Simpson-Formel, kann diese Formeln dann allerdings kaum in Beispielen verarbeiten, da diese Rechnungen – selbst unter Verwendung eines Taschenrechners – sehr umfänglich werden. Auf gar keinen Fall wird man bei Handberechnung die Schrittiefe n höher als vielleicht 10 wählen. Das bedeutet aber, daß man i.a. gar keine Chance hat, das Konvergenzverhalten des jeweiligen Verfahrens zu beobachten. Unter Benutzung von Derive können wir bei vernünftigen Berechnungszeiten auch sehr viel höhere Werte für n wählen und die Konvergenz untersuchen.

Die Trapez-Formel und die Simpson-Formel entstehen unter Verwendung einer regelmäßigen arithmetischen Zerlegung durch Approximation des Graphen von f durch einen Polygonzug, bestehend aus Trapezen, bzw. durch parabolische Kurvenstücke. Bei einer Zerlegung des Intervalls [a, b] in n Teile bekommen wir die Formeln

$$\begin{aligned}&\mathrm{TRAPEZ}(f, [a, b], n) := \\ &(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))\,\frac{b-a}{2n}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\mathrm{SIMPSON}(f, [a, b], n) := \\ &(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))\,\frac{b-a}{3n}\end{aligned}$$

wobei bei der Simpson-Formel eine gerade Zahl n vorausgesetzt wird. Diese Formeln lassen sich in folgende Derive Funktionen übertragen:[1]

```
TRAPEZ(f, x, a, b, n) := (b - a) * (
                                      LIM(f, x, a)
                                      +2 * SUM(LIM(f, x, a + k * (b - a)/n), k, 1, n - 1)
                                      +LIM(f, x, b)
                                     )/(2 * n)
```

1 Diese Funktionen werden in Derive in einer Eingabezeile eingegeben oder aus einer Datei geladen. Wir schreiben die Definitionen der Übersichtlichkeit halber mehrzeilig.

```
SIMPSON(f, x, a, b, n) := (b - a) * (
        LIM(f, x, a)
        +2 * SUM(LIM(f, x, a + 2 * k * (b - a)/n), k, 1,
        ((n/2) - 1))
        +4 * SUM(LIM(f, x, a + (2 * k - 1) * (b - a)/n),
        k, 1, n/2)
        +LIM(f, x, b)
       )/(3 * n)
```

Wir können nun z. B. die Trapez- und Simpson-Formel zur Approximation der Zahl π verwenden. Da ein Kreis mit Radius 1 den Flächeninhalt π hat, folgt aus der Kreisgleichung

$$\pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Verwendet man die Trapez- und Simpson-Formel mit $n = 2^k$ $(k = 2, \ldots, 8)$ so bekommt man die folgende Wertetabelle:

Tab. 1

n	4	8	16	32	64	128	256
4 TRAPEZ($\sqrt{1-x^2}$, x, 0, 1, n)	2,99570	3,08981	3,12325	3,13510	3,13929	3,14078	3,14128
4 SIMPSON($\sqrt{1-x^2}$, x, 0, 1, n)	3,08359	3,12118	3,13439	3,13905	3,14069	3,14127	3,14148

während eine 6-stellige Näherung von π durch 3,14159 gegeben ist. Bei dem gegebenen Beispiel sind beide Methoden besonders schlecht und einer Handberechnung nicht zugängig. Dies liegt an der Tatsache, daß die Einheitskreislinie an der Stelle $x = 1$ eine senkrechte Tangente hat. Man mache den Schülern geometrisch klar, warum in diesem Fall beide Methoden besonders schlecht sind! Berechnet man dagegen einen Näherungswert für

$$\int_0^\pi \sin x\,dx,$$

so zeigt sich, daß beide Methoden viel besser sind, aber die Simpson-Formel den Integralwert deutlich schneller approximiert. Mit 6-stelliger Genauigkeit bekommen wir:

Tab. 2

n	4	8	16	32	64	128	256
TRAPEZ(sin x, x, 0, π, n)	1,89611	1,97423	1,99357	1,99839	1,99959	1,99989	2
SIMPSON(sin x, x, 0, π, n)	2,00455	2,00026	2	2	2	2	2

Rechnet man nun mit einer 10-stelligen Genauigkeit, so liefert die Simpson-Formel die Tabelle:

Tab. 3

n	4	8	16	32
SIMPSON (sin x, x, 0, π, n)	2,004559754	2,000269173	2,000016591	2

Daß die Simpson-Formel bei diesem Beispiel so gut ist, ist kein Zufall. Der Graph der Sinusfunktion weicht im Intervall $[0, \pi]$ von einer (nach unten gerichteten) Parabel kaum ab, und da bei der Simpson-Formel der Graph durch parabolische Kurvenstücke approximiert wird, ist der Fehler sehr klein. In der Tat liefert die Simpson-Formel auf Grund ihrer Herleitung für quadratische Polynome immer den genauen Integralwert – unabhängig von n. Es ist weniger offensichtlich, daß dies auch noch für kubische Polynome zutrifft. Mit Derive läßt sich dieser Sachverhalt leicht zeigen. Die Differenz zwischen dem Integralwert

$$\int_a^b (ux^4 + vx^3 + wx^2 + yx + z)\,dx$$

eines beliebigen Polynoms $ux^4 + vx^3 + wx^2 + yx + z$ vierten Grades $(u, v, w, y, z \in \mathbb{R})$ und dem Näherungswert, den die Simpson-Formel liefert, ergibt sich durch Faktorisierung des Ausdrucks

INT (ux^4 + vx^3 + wx^2 + yx + z, x, a, b) –
SIMPSON (ux^4 + vx^3 + wx^2 + yx + z, x, a, b, n)

mit dem Ergebnis

$$-\frac{2u(b-a)^5}{15n^4}, \tag{11}$$

ist also u.a. gleich Null für jedes Polynom dritten Grades. Zudem wird in (11) die Fehlerschranke der Methode gleich mitgeliefert. Eine ähnliche Rechnung für die Trapez-Formel zeigt, daß diese lediglich für lineare Funktionen, also Polynome ersten Grades, korrekte Ergebnisse liefert.

5. Schlußbemerkung

Es sei noch bemerkt, daß Derive zwar auch eingebaute numerische Integrationsfähigkeiten besitzt. Das Benutzen dieser ist allerdings eine gewisse Unwägbarkeit: Während man beim formalen Integrieren wenigstens grundsätzlich weiß, was Derive tut, ist es überhaupt nicht klar, welche Methode zum numerischen Integrieren verwendet wird und wie groß der Approximationsfehler im konkreten Fall ist. Bevor die Schüler derartige Fähigkeiten von Derive benutzen, sollten sie sich ein Gefühl für den Anwendungsbereich einer Methode angeeignet haben.

Als ein typisches Beispiel für die unüberlegte Anwendung eines Computeralgebrasystems sei das folgende Integrationsergebnis von Derive erwähnt

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -2,$$

welches offenbar völlig unsinnig ist, da der Integrand überall positiv ist. Derive erzielt dieses Ergebnis durch formales Anwenden des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{1} = -1 = -2,$$

welcher im gegebenen Fall allerdings gar nicht angewendet werden darf: der Integrand hat ja im Integrationsintervall $[-1, 1]$ eine Polstelle! Es ist der Benutzer eines Computeralgebrasystems, der dafür Sorge tragen muß, daß die Bedingungen, unter denen korrekte Ergebnisse erzielt werden, eingehalten werden.

Unseres Erachtens ist es zunächst sehr viel sinnvoller, eine konkrete Methode selbst in Derive zu implementieren, wie wir dies hier am Beispiel der bestimmten Integration formal und numerisch getan haben, bevor man die eingebauten analytischen Fähigkeiten benutzt.

Als Schlußfolgerung aus diesem Beispiel möchten wir festhalten, daß nur ein gut ausgebildeter Schüler mit genügend mathematischen Kenntnissen ein Programm wie Derive mit Erfolg anwenden können wird. Das spricht aber nicht gegen den Einsatz von Derive in der Schule. Denn auch nur ein solcher Schüler wird ohne Derive einen Leistungskurs der Oberstufe mit Erfolg abschließen.

Es spricht jedoch gegen einen verfrühten Einsatz mit dem Ziel, als Hilfestellung für schlechte Schüler lästige Mathematik aus dem Unterricht zu verdrängen und durch mechanische Benutzung eines Programms wie Derive zu ersetzen. Dieser Schuß würde in der Tat nach hinten losgehen.

Anschrift des Verfassers: Dr. Wolfram Koepf, Seelingstraße 21, 1000 Berlin 19

Eingangsdatum: 24.7.1992

Literatur

[1] Engel, A.: Eine Vorstellung von Derive. In: Didaktik der Mathematik 18 (1990), S. 165–182
[2] Rich, A., Rich, J. u. D. Stoutemyer: Derive User Manual, Version 2, Soft Warehouse, Inc., 3660 Waialae Avenue, Suite 304, Honolulu, Hawaii, 96816-3236
[3] Schönwald, H. G.: Zur Evaluation von Derive. In: Didaktik der Mathematik 19 (1991), S. 252–265